



INTÉGRATION DE LA MODÉLISATION DU MATÉRIAU ET DU PROCÉDÉ POUR LE DESIGN ET L'OPTIMISATION D'UNE COMPOSANTE DE TRAIN D'ATERRISSAGE D'AVION : PROCÉDÉ DE FORGEAGE

Thèse

Kadiata Ba

Doctorat en génie mécanique

Philosophiæ doctor (Ph. D.)

Québec, Canada

© Kadiata Ba, 2017

INTÉGRATION DE LA MODÉLISATION DU MATÉRIAU ET DU PROCÉDÉ POUR LE DESIGN ET L'OPTIMISATION D'UNE COMPOSANTE DE TRAIN D'ATERRISSAGE D'AVION : PROCÉDÉ DE FORGEAGE

Thèse

Kadiata Ba

Sous la direction de :

Augustin Gakwaya, directeur de recherche

Michel Guillot, codirecteur de recherche

Résumé

Le présent travail concerne l'intégration de la modélisation du matériau et du procédé dans le design et l'optimisation d'une composante de train d'atterrissage d'avion fabriquée par forgeage à chaud en collaboration avec la société Héroux-Devtek.

Pour mener à bien cette tâche, un travail d'investigation des différents aspects du matériau, du procédé et des techniques de modélisations numériques a été effectué. Une caractérisation des propriétés mécaniques et métallurgiques de l'alliage d'aluminium 7175 sous différentes conditions a été réalisée, ce qui a conduit à une meilleure connaissance du comportement de cet alliage notamment dans les conditions de forgeage. Le modèle de comportement de Johnson-Cook a été caractérisé et utilisé pour les simulations des différents cas d'analyse. Une investigation au niveau de l'intégration de l'effet de la microstructure dans le modèle de comportement a été faite. Cette étude a conduit à considérer le modèle de Johnson-Cook modifié qui a la particularité de prendre en compte les effets de la recristallisation dynamique dans le modèle d'écoulement du matériau. Une meilleure précision est obtenue en comparaison avec le modèle de Johnson-Cook standard pour des simulations impliquant de hauts niveaux de déformation.

De plus, une investigation au niveau des plus récents outils de simulation a été effectuée. Une étude comparative des formulations CEL (Couplage Eulérien-Lagrangien) et SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) vis-à-vis de la méthode classique des ÉF (éléments finis) a permis de classifier les différentes approches selon leurs performances relatives lors des simulations du forgeage de pièces complexes en grandes transformations (écoulement de matière très important). Pour pouvoir utiliser la formulation SPH interne à Abaqus dans le cas de couplage thermomécanique, il a fallu développer un VUMAT («user's material») thermomécanique. Une contribution a été apportée au niveau de la méthode SPH pour la simulation plus précise du forgeage, d'abord en extensionnant un code SPH maison afin qu'il puisse résoudre des problèmes thermomécaniques couplés en grandes déformations et ensuite en transformant le code SPH en un élément de l'utilisateur («user's element») via l'utilitaire VUEL d'Abaqus en formulation Lagrangienne totale.

En guise de validation, nous avons réalisé des travaux autant de nature numérique qu'expérimentale. Au niveau numérique, les résultats obtenus avec le code maison ont été validés par comparaison avec les résultats obtenus avec le code commercial Abaqus. Par ailleurs afin d'atteindre l'objectif principal d'intégration de la modélisation du matériau et du procédé, une méthodologie d'analyse appropriée a été développée et validée expérimentalement en concevant et en fabriquant par forgeage, un prototype représentatif de la pièce industrielle.

Mots-clés : Forgeage à chaud, train d'atterrissage, caractérisation, alliages d'aluminium, Johnson-Cook, recristallisation dynamique, Abaqus, ÉF, CEL, VUMAT, VUEL SPH, formulation Lagrangienne totale, code SPH.

Abstract

The present work deals with the development of an integrated material and process modeling methodology for the design and optimization of an aircraft landing gear component manufactured using hot forging process in collaboration with Héroux-Devtek.

To carry out this work, an investigative work of the different aspects of the material, process and numerical modeling techniques is performed. A characterization of mechanical and metallurgical properties of the aluminum alloy 7175 under various conditions has been done and the work allowed to better know the behavior of this alloy particularly in our forging conditions. The Johnson-Cook constitutive model was characterized and used for simulations of various processes analysis. An investigation about the integration of the effect of the microstructure in the material behavior law was realized. This study led one to consider a modified Johnson-Cook model that can take account of the effects of dynamic recrystallization during the material flow. A greater accuracy was obtained in comparison with the standard Johnson- Cook model for simulations involving high strain levels.

An investigation about the simulation tools was also performed. A comparative study of CEL (Coupling Eulerian-Lagrangian) and SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) formulation with the finite elements method (FEM) allowed to classify the different methods according to their performance in the simulations of complex forged part involving large deformations (very important material flow). To use the SPH formulation existing in Abaqus for the simulation of coupled thermomechanical problems, it was first necessary to develop a thermomechanical VUMAT (user's material) subroutine. For more accurate simulation of forging process, a contribution was made regarding the SPH method. To do this, an independent in-house SPH code and an ABAQUS VUEL (user's element) subroutine based on the total Lagrangian formulation of solid mechanic's equations were developed.

For validation purposes, both numerical investigations and experimental works were accomplished. Regarding the numerical simulation, the results obtained with the in-house code were validated by comparing them with results obtained using the Abaqus FE

commercial code. Moreover, in order to achieve the main objective of integrated material and process modeling for the product design, a suitable methodology was developed and validated experimentally by designing and manufacturing by the closed die hot forging process, a representative prototype of the industrial part.

Keywords: Hot forging, landing gear, aluminum alloys, Johnson-Cook, dynamic recrystallization, Abaqus, FE, CEL, VUMAT, VUEL SPH, total Lagrangian formulation, SPH code.

Table des matières

Résumé.....	iv
Abstract	vii
Liste des tableaux par chapitre.....	xiv
Liste des figures par chapitre	xvi
Remerciements.....	xxiv
Notations et abréviations.....	xxvi
Introduction.....	1
Le contexte.....	1
Les objectifs de la thèse	4
L'organisation de la thèse : méthodologie	5
Chapitre 1.....	9
Revue de la littérature	9
1.1. Introduction.....	10
1.2. Évolution de la mise en forme par forgeage	10
1.3. Analyse des différents procédés de forgeage.....	22
• Forgeage à froid	24
• Forgeage à chaud	25
1.4. Les phénomènes physiques.....	27
1.4.1. Lois de comportement : Évolution de la microstructure.....	31
1.4.2. Quelques modèles de lois de comportement tenant compte des effets métallurgiques.....	34
• Modèle de Johnson-Cook modifié.....	35
• Modèle de Zirelli-Armstrong.....	36
• Modèle de contrainte seuil mécanique (MTS Mechanical Threshold Stress model)	37
1.5. Choix de la loi de comportement	38
1.6. Conclusion	39
Chapitre 2.....	41
Formulation mathématique et numérique du forgeage	41
2.1. Introduction.....	42
2.2. La théorie des grandes déformations	43
2.2.1. Cinématique des grandes déformations	44
2.2.1.1. Exemple de description cinématique [G2].....	46
2.2.2. Description des tenseurs des contraintes.....	48
2.3. Lois de conservation	49
2.3.1. Expression générale d'une loi de conservation.....	49
2.3.2. Conservation de la masse.....	50
2.3.3. Loi fondamentale de la mécanique ou conservation de la quantité de mouvement.....	51
2.3.4. Conservation de l'énergie (1 ^{ère} loi de la thermodynamique).....	56
2.3.5. Inégalité de l'entropie (2 ^{ème} loi de la thermodynamique)	57
2.4. Lois de comportement pour matériaux dissipatifs en grandes déformations.....	59
2.4.1. Relation cinématique	62
2.4.2. Comportement thermo-élasto-viscoplastique et Énergie libre de Helmholtz	

2.4.3.	Inégalité de Clausius-Duhem	64
2.4.4.	Inégalité réduite de dissipation	65
2.4.5.	Loi d'évolution des variables internes	66
2.5.	Conditions aux limites de type mécanique pour un problème de mise en forme	69
2.6.	Modélisation du problème thermique	70
2.7.	Discretisation par la MÉF du modèle couplé.....	73
2.7.2.	Aspect numérique : discrétisation spatio-temporelle.....	74
2.7.3.	Méthode de résolution.....	77
2.8.	Résumé pour un problème thermomécanique.....	85
2.10.	Intégration d'une loi de comportement.....	86
2.11.	Conclusion	90
Chapitre 3.....		91
	Caractérisation de l'alliage AA7175 et du procédé de forgeage	91
3.1.	Introduction.....	92
3.2.	Procédures expérimentales.....	93
3.3.	Procédure d'identification des paramètres de la loi de comportement de Johnson-Cook	103
3.3.1.	Validation du coefficient de friction	106
3.4.	Validation des paramètres déterminés	107
3.5.	Forgeage : Expérimental et simulation	113
3.5.1.	Forgeage de la pièce simple	113
3.5.2.	Refroidissement	126
3.5.3.	Identification des paramètres de Johnson-Cook modifié et simulation de la pièce simple	130
3.5.3.1	Simulation de la pièce simple avec le modèle de Johnson-Cook modifié	136
3.5.3.2	Forme des grains et niveau de déformation	141
3.6.	Conclusion	144
Chapitre 4.....		145
	Contraintes résiduelles et traitement thermique de trempe.....	145
4.1.	Introduction.....	146
4.2.	Contraintes résiduelles après le forgeage.....	146
4.2.1.	Causes des contraintes résiduelles	147
4.2.2.	Classification des contraintes résiduelles.....	148
4.2.3.	Méthode de mesure des contraintes résiduelles	149
4.2.4.	Estimation d'erreur de mesure par la méthode de contours.....	151
4.2.5.	Résultats des mesures expérimentales et simulées des contraintes résiduelles	156
4.3.	Traitement de trempe et contraintes résiduelles.....	162
4.3.1.	Modélisation de la trempe.....	164
4.3.2.	Trempe de coupons cylindriques	166
4.3.3.	Trempe sur la pièce forgée.....	174
4.4.	Conclusion	183
Chapitre 5.....		185
	Application sur le modèle industriel	185

5.1.	Introduction.....	186
5.2.	Simulation du forgeage avec la méthode CEL	188
5.3.	Cas du refroidissement de la pièce industrielle.....	191
5.4.	Analyse des contraintes résiduelles	193
5.5.	Comparaison des propriétés de la pièce industrielle avec celles de la pièce simple après forgeage	197
5.6.	Conclusion	201
	Chapitre 6.....	203
	Formulation lagrangienne totale de la méthode SPH : application au procédé de mise en forme	203
6.1.	Introduction.....	204
6.2.	Rappels : formulation SPH classique.....	205
6.2.1.	Représentation intégrale d'un champ de fonction	207
6.2.2.	Conditions et propriétés de la fonction de lissage	207
6.2.3.	Approximation discrète du schéma d'interpolation.....	209
6.2.4.	Choix de la fonction W	211
6.2.5.	Quelques problèmes liés à SPH et leur correction.....	211
6.3.	Formulation SPH en mécanique des solides.....	215
6.3.1.	Rappel des équations de la mécanique des milieux continus (MMC)	215
a)	Formulation SPH spatiale des équations de la MMC	217
b)	Formulation SPH matérielle des équations de la MMC	219
6.3.2.	SPH corrigé en formulation lagrangienne totale.....	222
6.4.	Mise en œuvre numérique.....	224
6.4.1.	Algorithme de résolution	224
6.4.2.	Schéma d'intégration temporelle.....	227
6.4.3.	Discretisation spatiale	229
6.4.4.	Sous-routine recherche de voisin	229
6.4.5.	Algorithme SPH normalisé corrigé.....	231
6.5.	Applications	235
6.5.1.	Application via le code commercial Abaqus	235
6.5.2.	Performance relative des méthodes ÉF, CEL et SPH d'Abaqus	239
6.5.3.	Application avec un code SPH maison indépendant	244
6.5.4.	Application via un VUEL d'Abaqus.....	250
6.5.4.1.	Exemples d'applications et de validation	251
a)	Impact de Taylor	251
b)	Compression latérale.....	253
6.6.	Conclusion	255
	Chapitre 7.....	257
	Conclusion générale et perspectives	257
	Références Bibliographiques	263
	Annexe 1 : VUMAT	279
	Annexe 2 : Étapes de modélisation d'un VUEL dans Abaqus [Documentation d'abaqus]	283
	Annexe 3: Integration of the constitutive laws [Simo]	286

Liste des tableaux par chapitre

Chapitre 2

Tableau 2- 1 : Résumé des variables de modélisation	64
Tableau 2- 2 : Résumé des variables de modélisation en axes principales.....	87

Chapitre 3

Tableau 3 - 1: Approche de résolution adoptée	93
Tableau 3 - 2: Plan de test de caractérisation du matériau.....	95
Tableau 3 - 3: Paramètres de Johnson-Cook Al 7175.....	105
Tableau 3 - 4 : Tableau comparatif entre la composante industrielle et la pièce simple	116
Tableau 3 - 5 : Tableau comparatif des résultats de simulation selon le type et le nombre d'éléments (a), b) et c) Lagrangien, d) CEL).....	125

Chapitre 4

Tableau 4- 1 : Résultats de calculs d'incertitude à une densité de grille $\rho = 1,6$ knot/mm	153
Tableau 4- 2: Tableau d'incertitude de mesure de contraintes résiduelles en fonction du maillage ÉF (densité de grille optimale de 1,6 knot/mm).....	155

Chapitre 5

Tableau 5 - 1: Dimensions de préformage pour un alliage d'aluminium (nervure) [D3]	187
Tableau 5 - 2: Rappel des conditions de forgeage	189

Chapitre 6

Tableau 6 - 1 : Comparaison des résultats d'ÉF avec SPH (vumat) pour le cas du test de compression.	236
Tableau 6 - 2 : Tableau comparatif des résultats du test d'impact de Taylor [L7]	252

Liste des figures par chapitre

Chapitre 1

Figure 1- 1: Approximation particulière dans le domaine de support de la fonction de lissage W d'une particule i [L5]	19
Figure 1- 2 : Quelques auteurs et leur contribution au niveau de la modélisation du forgeage.....	20
Figure 1- 3 : Évolution dans le temps de la modélisation et simulation du forgeage [K1].	21
Figure 1- 4 : Différents paramètres à prendre en compte dans un procédé de forgeage...	23
Figure 1- 5: Exemple d'illustration d'un procédé de forgeage à froid [3]	24
Figure 1- 6: a) Forgeage en matrices fermées, b) forgeage en matrices ouvertes [2]	26
Figure 1- 7 : Représentation schématique de l'hétérogénéité de la déformation [V1]	28
Figure 1- 8 : Échelle de résolution pour la déformation plastique.....	28
Figure 1- 9 : Évolution de la microstructure durant (a) la déformation à chaud d'un matériau subissant de la restauration et (b) la déformation à chaud d'un matériau subissant de la recristallisation [V3].	30
Figure 1- 10 : Échelles spatiales et temporelles et méthodes de simulations correspondantes [10]	32

Chapitre 2

Figure 2- 1 : Description d'un mouvement [B1]	44
Figure 2- 2 : Transformation d'un vecteur « matériel » [G2]	45
Figure 2- 3 : Modélisation des efforts de contact intérieur [G2]	52
Figure 2- 4 : Représentation du vecteur contrainte [G2]	52
Figure 2- 5 : Décomposition multiplicative du tenseur gradient de déformation [B3]	60
Figure 2- 6 : Modélisation des conditions aux limites du problème mécanique [P1]	69
Le calcul des différents termes de la matrice tangente nécessite l'intégration des équations de comportement et de frottement pour calculer les incréments de toutes les variables d'état. La Figure 2- 7 donne un algorithme de résolution par un schéma de type statique implicite [L3].	78
Figure 2- 7 : Algorithme de résolution par un schéma de type statique implicite [L3]	79
où ρ est la densité du matériau et λ et μ représentent les constantes effectives de Lamé. La figure 2- 8 donne un algorithme de résolution pour un problème mécanique par un schéma d'intégration explicite [L3].	80
Figure 2- 8 : Algorithme de résolution pour un problème mécanique par un schéma d'intégration explicite [L3]	81
Figure 2- 9 : Algorithme de résolution pour un problème thermique par un schéma d'intégration explicite [L3]	82
Figure 2- 10 : Algorithme de résolution thermomécanique général par un schéma d'intégration explicite [L3]	84

Chapitre 3

Figure 3- 1 : a) Machine et échantillon de compression, b) Échantillon de traction	94
Figure 3- 2 : Emplacement des échantillons sur le bloc de matériau et la microstructure associée (échelle = 200 microns)	97
Figure 3- 3 : Emplacement des échantillons sur la billette et la microstructure associée.	98
Figure 3- 4: Courbes contrainte-déformation en compression à température ambiante pour un taux de déformation de 0.1 s^{-1} : comparaison des échantillons dans le sens transverse versus les échantillons dans le sens longitudinal.	100
Figure 3- 5 : Comparaison des courbes de compression et de traction à température ambiante à un taux de déformation de $0,1/\text{s}$ dans le sens longitudinal.	101
Figure 3- 6: Courbes contraintes-déformation à 400°C à différents taux de déformation	101
Figure 3- 7: Courbes contraintes-déformation à différentes températures, $\dot{\epsilon}_0=0,133/\text{s}$..	102
Figure 3- 8 : Influence du coefficient de friction sur les courbes contraintes-déformation lors des simulations du test de compression à $T=400^\circ\text{C}$ et $\dot{\epsilon}_0=0,1/\text{s}$	106
Figure 3- 9: Test de compression axiale	107
Figure 3- 10: Comparaison : expérimental vs simulation avec Johnson-Cook à 25°C $\dot{\epsilon}_0=0,133/\text{s}$	107
Figure 3- 11: Comparaison : expérimental vs simulation avec Johnson-Cook à 200°C $\dot{\epsilon}_0=0,133/\text{s}$	108
Figure 3- 12: Comparaison : expérimental vs simulation avec Johnson-Cook à 400°C $\dot{\epsilon}_0=0,1/\text{s}$	108
Figure 3- 13: Compression latérale : position des outils et de la pièce.....	109
Figure 3- 14: Comparaison des courbes force-déplacement : a) résultat ÉF, b) résultat CEL	109
Figure 3- 15: Comparaison des courbes de température (gauche) et la différence de température (droite) à 400°C	110
Figure 3- 16: Comparaison des dimensions après le test : simulation vs expérimental à 400°C	110
Figure 3- 17: Comparaison des courbes force-déplacement à 300°C : a) résultat ÉF, b) résultat CEL	111
Figure 3- 18: Comparaison des courbes de température (gauche) et la différence de température (droite) à 300°C	112
Figure 3- 19 : Comparaison des dimensions après le test : simulation vs expérimental à 300°C	112
Figure 3- 20 : Composante industrielle vs pièce simple	114
Figure 3- 21 : Localisation des niveaux de déformations composante industrielle vs pièce simple.....	115
Figure 3- 22 : Évolution du design de la préforme	117
Figure 3- 23 : Évolution du design de la pièce à forger.....	117
Figure 3- 24 : Couplage eulérien-lagrangien (a) [S4], b) documentation d'Abaqus).....	118
Figure 3- 25 : Assemblage matrices préforme et volume de contrôle dans Abaqus.....	119
Figure 3- 26 : Simulation du forgeage : différentes vues d'avant la mise en forme.....	119
Figure 3- 27 : Forgeage de la pièce réelle.....	120
Figure 3- 28 : Comparaison de la simulation du forgeage avec le forgeage réel à différentes étapes	121

Figure 3- 29 : a) et b) Comparaison des dimensions de la pièce forgée par simulation avec celles de la pièce forgée expérimentalement c) Comparaison des forces appliquées pendant le forgeage avec celles obtenues par simulation à 50 t, 100 t, 150 t et 225 t.	124
Figure 3- 30 : Comparaison des courbes de force déplacement pour les simulations : méthode élément fini Lagrangienne versus méthode CEL dans Abaqus	126
Figure 3- 31 : Position du thermocouple (en rouge) avant et après forgeage	127
Figure 3- 32 : Courbe de refroidissement de la pièce après forgeage.....	128
Figure 3- 33 : Position des thermocouples sur la pièce	128
Figure 3- 34 : Courbes d'évolution de la température à différentes zones de la pièce lors du refroidissement.....	129
Figure 3- 35 : Observation de la recristallisation à 400 °C à $\dot{\epsilon}_0=0,133/s$	131
Figure 3- 36 : Structure en collier : recristallisation dynamique [V3].....	131
Figure 3- 37 : Métallographie à 300°C : observation du début de formation de la structure en collier caractéristique de la recristallisation dynamique (Échelle=200 microns).	132
Figure 3- 38 : Métallographie à 400°C : observation de la structure en collier caractéristique de la recristallisation dynamique (Échelle=200 microns).	132
Figure 3- 39 : Température de recristallisation en fonction de l'évolution des contraintes	133
Figure 3- 40 : Évolution des contraintes à 20% de déformation plastique en fonction de la température à différents taux de déformation	133
Figure 3- 41 : a) Courbes d'écoulement typique durant le travail à froid et à chaud [G7], b) Courbes d'écoulement à 0,001/s versus 0,1/s pour l'alliage 7175 à 400°C	134
Figure 3- 42 : Comparaison des contraintes de Johnson-Cook classique et modifié avec l'expérimental : Test de compression à 400 °C	135
Figure 3- 43 : Comparaison de la simulation de la pièce simple avec Johnson-Cook standard et Johnson-Cook modifié.....	136
Figure 3- 44 : Emplacement des métallographies par rapport à la déformation plastique	136
Figure 3- 45 : Observation de la recristallisation dynamique à différents endroits (a), b), c) et d)) sur la pièce forgée (Échelle=100 microns).....	140
Figure 3- 46 : Zone d'observation des micrographies pour comparaison de l'évolution des grains.....	141
Figure 3- 47 : Microstructure avant et après forgeage vs déformation (échantillons1a et 2)	142
Figure 3- 48 : Microstructure avant et après forgeage vs déformation (échantillons1b et 3)	143

Chapitre 4

Figure 4 - 1 : Contraintes résiduelles versus contraintes de services [L12].....	147
Figure 4 - 2 : Origines des contraintes résiduelles	147
Figure 4 - 3 : Illustration des contraintes résiduelles d'ordre I, II et II.....	148
Figure 4 - 4 : Calcul de contraintes résiduelles par la méthode des contours [P4]	150

Figure 4 - 5 : Zone de coupe pour les mesures de contraintes résiduelles.....	151
Figure 4 - 6 : Incertitude sur les contraintes et écart RMS en fonction de la densité de la grille de splines cubiques pour l'échantillon Q1.....	154
Figure 4 - 7 : Évolution des contraintes minimale et maximale calculées en fonction de la densité de la grille des splines cubiques pour l'échantillon Q1	154
Figure 4 - 8 : Distribution de l'incertitude des contraintes pour l'échantillon Q1.....	155
Figure 4 - 9 : Position des contraintes maximale et minimale dans la section de coupe F1 (échantillon forgé numéro1)	156
Figure 4 - 10 : Contraintes résiduelles le long de l'axe horizontal dans la section de coupe F1 (échantillon forgé numéro 1)	156
Figure 4 - 11 : Position des contraintes maximale et minimale dans la section de coupe F2 (échantillon forgé numéro 2)	157
Figure 4 - 12 : Contraintes résiduelles le long de l'axe horizontal dans la section de coupe F2 (échantillon forgé numéro 2)	157
Figure 4 - 13 : Comparaison expérimentale des valeurs de contraintes résiduelles de forgeage selon différentes sections	158
Figure 4 - 14 : Intensité et distribution des contraintes résiduelles S33 (σ_{zz}) globales de simulation sur l'axe horizontale.....	159
Figure 4 - 15 : Comparaison graphique des résultats expérimentaux avec la simulation.....	159
Figure 4 - 16 : Comparaison de l'expérimental avec la simulation des valeurs de contraintes résiduelles de forgeage selon différentes sections.....	160
Figure 4 - 17 : Séquence de trempe des cylindres et de la pièce simple	165
Figure 4 - 18 : Diagramme de modélisation de l'analyse de la trempe [R3].....	165
Figure 4 - 19 : Cylindre de trempe [R3]	166
Figure 4 - 20 : Position des contraintes maximale et minimale dans la section de coupe pour le cas de trempe (CQ1=Trempe sans agitation ; CQ2=Trempe avec agitation ; CQ3=Trempe sans agitation (répétition de CQ-1) ; CQ4=Trempe avec agitation (répétition de CQ-2))) et position des thermocouples le long de l'échantillon cylindrique	167
Figure 4 - 21 : Évolution de la température lors de la trempe du cylindre au centre (expérimental vs simulation).....	168
Figure 4 - 22 : Évolution de la température lors de la trempe du cylindre au demi-rayon (expérimental vs simulation).....	168
Figure 4 - 23 : Variation du coefficient de transfert thermique en fonction de la température et réaction endothermique.....	169
Figure 4 - 24 : Comparaison des évolutions de température selon la température de trempe au centre du cylindre (expérimental)	170
Figure 4 - 25 : Comparaison des évolutions de température selon la température de trempe au demi-rayon du cylindre (expérimental).....	170
Figure 4 - 26 : Comparaison des courbes de contraintes résiduelles expérimentales sur l'axe x et l'axe y après la trempe à 25°C (<i>Écart-type expérimental : 21.2 MPa</i>)... ..	171
Figure 4 - 27 : Comparaison de la courbe de contraintes résiduelles expérimentales avec le résultat de simulation pour la trempe à 25°C	172
Figure 4 - 28 : Comparaison des contraintes résiduelles selon la température de trempe du cylindre	172

Figure 4 - 29 : Position des thermocouples (1, 2 et 3) dans la pièce lors de la trempe ($T1 =$ thermocouple de surface, $T2 =$ thermocouple dans le cylindre et $T3 =$ thermocouple au centre)	174
Figure 4 - 30 : Évolution de la température lors de la trempe : Thermocouple du cylindre (expérimental vs simulation).....	174
Figure 4 - 31 : Évolution de la température lors de la trempe : Thermocouple du centre (expérimental vs simulation).....	175
Figure 4 - 32 : Évolution de la température lors de la trempe : Thermocouple de surface (expérimental vs simulation).....	175
Figure 4 - 33 : Position des contraintes maximale et minimale dans la section de coupe Q1 (trempé sans agitation)	176
Figure 4 - 34 : Contraintes résiduelles le long de l'axe horizontal dans la section de coupe Q1 (trempé sans agitation)	176
Figure 4 - 35 : Position des contraintes maximale et minimale dans la section de coupe Q2 (trempé avec agitation).....	177
Figure 4 - 36 : Contraintes résiduelles le long de l'axe horizontal dans la section de coupe Q2 (trempé avec agitation).....	177
Figure 4 - 37 : Comparaison expérimentale des valeurs de contraintes résiduelles de trempe sur différentes sections.....	178
Figure 4 - 38 : Résultat simulé (Johnson-Cook classique) : Intensité et distribution des contraintes résiduelles S33 (σ_{zz}).....	179
Figure 4 - 39 : Comparaison : expérimental versus simulation pour les cas de trempe .	179
Figure 4 - 40 : Comparaison expérimental versus simulation des valeurs de contraintes résiduelles de trempe selon différentes sections	180
Figure 4 - 41 : Comparaison des contraintes résiduelles de forgeage avec les contraintes résiduelles de trempe (Q1 : échantillon forgé et trempé 1, Q2 échantillon forgé et trempé 2, F1 : échantillon forgé 1, F2 : Échantillon forgé 2)	182

Chapitre 5

Figure 5 - 1 : Comparaison de la pièce préformée et finie pour un quart d'une section H [D3].	187
Figure 5 - 2 : Matrice de préforgeage modélisée avec Abaqus 6.14.....	188
Figure 5 - 3 : Matrice de finition modélisée avec Abaqus 6.14.....	188
Figure 5 - 4 : Niveau de déformation plastique atteint lors du forgeage de finition.....	189
Figure 5 - 5 : Résultats de simulation à l'étape de préforgeage.....	190
Figure 5 - 6 : Résultats de simulation à l'étape finale.....	190
Figure 5 - 7 : Positions des différents points de mesure de la température	192
Figure 5 - 8 : Courbes de refroidissement de la pièce industrielle.....	192
Figure 5 - 9 : Évolution des contraintes lors du refroidissement selon les points de la figure 5-7.....	194
Figure 5 - 10 : Zones et points de mesures des contraintes S_{zz} à travers l'épaisseur.....	195
Figure 5 - 11 : Profil des contraintes résiduelles S_{zz} à travers l'épaisseur à quelques endroits après préforgeage	195
Figure 5 - 12 : Courbes typiques de refroidissement des zones a), b) et c).	196

Figure 5 - 13 : Profils expérimentaux de contraintes S33 à travers différentes épaisseurs de la pièce simple.....	197
Figure 5 - 14 : Propriétés de la pièce industrielle après forgeage	198
Figure 5 - 15 : Propriétés de la pièce simple après forgeage	199
Figure 5 - 16 : Comparaison des propriétés de la pièce simple avec celles de la pièce industrielle.....	200
Figure 5 - 17 : Comparaison des courbes de refroidissement de pièce simple avec celles de la pièce industrielle	200

Chapitre 6

Figure 6 - 1 : a) Représentation schématisée de la discrétisation du domaine Ω par un ensemble de points P_i , voisinage d'un nœud SPH [C3] et b) vue dans l'espace d'un noyau de type B-spline B3 [M8].....	209
Figure 6 - 2 : Approximation particulière dans le domaine de support de la fonction de lissage W d'une particule i [L5]	210
Figure 6 - 3 : Détails de l'algorithme général de résolution dans la sous-routine time intégration [L5]	226
Figure 6 - 4 : « All-pair search algorithm » [L14]	230
Figure 6 - 5 : « Linked-list algorithm » [L14]	230
Figure 6 - 6 : « Tree search algorithm » [L14]	231
Figure 6 - 7 : Test de compression SPH	236
Figure 6 - 8 : Courbes contraintes-déformation : Abaqus MÉF versus VUMAT SPH ..	237
Figure 6 - 9 : Courbes d'évolution de la température : Abaqus MÉF versus VUMAT SPH	237
Figure 6 - 10 : Comparaison Expérimental versus Abaqus MÉF versus VUMAT SPH	237
Figure 6 - 11 : Résultat de forgeage avec le VUMAT en SPH : a) pièce forgée en SPH et b) comparaison des courbes d'évolution de la température.....	238
Figure 6 - 12 : Formulation ALE à deux instants successifs [G1].....	240
Figure 6 - 13 : Comparaison des résultats de simulation ÉF, CEL ET SPH.....	241
Figure 6 - 14 : Comparaison ÉF(CD)-CEL-SPH selon le critère de facilité d'utilisation	242
Figure 6 - 15 : Comparaison ÉF(CD)-CEL-SPH selon le critère de qualité de surface .	242
Figure 6 - 16 : Comparaison ÉF(CD)-CEL-SPH selon le critère de temps de calcul.....	242
Figure 6 - 17 : Comparaison ÉF(CD)-CEL-SPH selon les critères d'évaluation	243
Figure 6 - 18 : Structure du code SPH [L14].....	245
Figure 6 - 19 : Test de compression en SPH.....	245
Figure 6 - 20 : Courbes contraintes-déformation : Expérimental versus code maison SPH	246
Figure 6 - 21 : Courbes d'évolution de la température : Abaqus MÉF versus le VUMAT SPH versus le code SPH maison : a) en considérant la convection et b) en négligeant la convection	246
Figure 6 - 22 : Évolutions de température selon les sources de chaleur lors du test de compression	247
Figure 6 - 23 : Exemple simple de forgeage : code SPH maison	248

Figure 6 - 24 : Exemple de simulation de forgeage : MÉF Abaqus	248
Figure 6 - 25 : Évolution des contraintes en fonction de la déformation.....	249
Figure 6 - 26 : Évolution de la température à différents nœuds dans le temps.....	249
Figure 6 - 27 : Test d'impact de Taylor : Comparaison de SPH Abaqus et du VUEL avec le résultat expérimental du test	251
Figure 6 - 28 : Schématisation de l'échantillon déformé.....	252
Figure 6 - 29 : Test de compression latérale SPH Abaqus vs VUEL : comparaison du temps de simulation	253
Figure 6 - 30 : Comparaison de SPH mécanique avec l'expérimental et SPH thermomécanique pour le test de compression étudié à la section 6.5.1	254

Remerciements

Au moment de présenter ce travail, c'est pour moi un plaisir de remercier toutes et tous d'ici et d'ailleurs qui ont apporté leur soutien, compétence, affection et amitié tout au long de ces années.

Tout d'abord, mes remerciements les plus sincères à mon directeur Augustin Gakwaya pour m'avoir intégré dans son équipe depuis la maîtrise. Un grand merci pour tout le support et l'encadrement, j'ai apprécié chaque enseignement aussi bien sur le plan scientifique, social et que sur le plan humain.

Je remercie également mon co-directeur Michel Guillot pour ses précieux conseils au niveau de la conception des modèles expérimentaux effectués dans ce travail.

Un très grand merci à Julie Levesque. Julie, j'ai vraiment apprécié notre collaboration tout au long de ce travail. Tes conseils, tes corrections et ta supervision m'ont été précieux.

Je remercie tous les membres du laboratoire M3C pour leur collaboration et leur amitié. Je tiens à remercier personnellement Qiwei He, Oussama Mechri, Mohamed Jebahi et Walid Jomaa pour les différents travaux de collaboration.

Merci au personnel des laboratoires de génie mécanique et de génie civil pour leur soutien et expertise dans le développement des tests expérimentaux.

Merci au CRSNG (Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada), à Héroux-Devtek, au REGAL (Centre de recherche sur l'aluminium) et au CQRDA (Centre Québécois de Recherche et Développement de l'Aluminium) pour la collaboration et l'appui financier.

Finalement, ma très profonde gratitude et reconnaissance à ma merveilleuse famille particulièrement ma mère Fatimata, mon père Thierno Aliou, ma jumelle Kolle ainsi que mes frères et sœurs ARAHOE. Merci pour l'accompagnement éducatif, social et financier de la maternelle à Pauline aux études supérieures à Laval source de savoir. Ce cheminement cadre bien avec Bamtaare concept pulaar, le savoir est à partager.

Merci également à HAMASAH et à mes oncles Abou Diallo et Djibril Diallo pour leur accueil et leurs conseils.

Merci à mes amis d'ici et d'ailleurs pour le soutien et l'encouragement aux cours des dernières années.

Une pensée profonde à mes grands-parents Aïssata et Baba-baye et à tous les membres de ma famille élargie.

ON JAARAAMA, Merci à tout le monde.

Notations et abréviations

Notations

A = Contrainte d'écoulement équivalente

B = Coefficient d'écrouissage

$\mathbf{B}, \mathbf{b}^e$ = Tenseur de Cauchy Green gauche

B^k = Matrice d'interpolation au nœud K

b = Amplitude du vecteur de Burger,

β = Fraction de travail mécanique convertie en chaleur

C = Coefficient de sensibilité à la déformation

$\mathbf{C}$ = Tenseur de Cauchy Green droit

$[C]$ = Matrice capacitance

C_{ijkl} = Tenseur tangent.

C_v = Capacité calorifique spécifique

C_d = Vitesse du son à travers le matériau

C^t = Configuration actuelle

C^t = Configuration intermédiaire

C^0 = Configuration de référence

$\mathbf{D}$ = Tenseur taux de déformation

$\text{Det}A$ = Déterminant de la matrice A

Dt = Variation de température

E = Module de Young

e = Énergie interne

$\mathbf{E}$ = Tenseur de Green-Lagrange

ε = Déformation

$\dot{\varepsilon}$ = Taux de déformation

ε^p = Déformation plastique

$\dot{\varepsilon}^p$ = Taux de déformation plastique équivalente

ε_0 = Déformation initiale

$\boldsymbol{\varepsilon}_{vp}$ = Déformation thermo-visco-plastique

f =Critère d'écoulement plastique

$\mathbf{F}$ =Tenseur gradient de déformation

$\vec{f}$ =Force volumique

G = Module de cisaillement

$\mathbf{g}_{int}$ et $\mathbf{g}_{ext}$ = Flux de chaleur interne et externe

(g_{0i}, g_{0e}) = Énergies d'activation normalisées

H = Variable associée à la recristallisation dynamique

h = Longueur de lissage des particules SPH

J =Jacobien

J_2 = Second invariant du tenseur

k = Coefficient de conductivité

$[K_{MM}]$ =Sous-matrice tangente relative au problème purement mécanique

$[K_{TT}]$ =Sous-matrice tangente relative au problème purement thermique

$[K_{TM}]$ Et $[K_{MT}]$ =Sous-matrices tangentes du couplage thermomécanique

kh = Intensité des contraintes microstructuraux

k_b = Constante de Boltzman,

$\mathbf{L}$ =Gradient de vitesse dans la configuration actuelle

l = Diamètre moyen des grains.

m = Coefficient de ramollissement thermique

$[M]$ = Matrice masse

m = Facteur d'échelle de temps (dans Chapitre 2)

N^k = Fonction d'interpolation au nœud K

N = Vitesse de déformation de l'écrouissage

$\vec{n}$ = Vecteur normal

p =Pression

$\mathbf{P}$ = Tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff 1

Q, q = Flux de chaleur

$\mathbf{R}$ = Tenseur de rotation

r = Source interne de chaleur

R_{pl} = Source interne de chaleur provenant de la mécanique

R =Variable d'écrouissage isotrope

R_g =Repère galiléen

s = Entropie

τ = Tenseur des contraintes déviatoriques

$\mathbf{S}$ = Tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff 2

T = Température

T_m = Température de fusion

T_r = Température de référence

t = Temps

$\vec{t}_c$ =Force de contact

$\vec{t}$ =Force ssurfacique

Δt =Incrément de temps

$\mathbf{u}$ = Vecteur déplacement

$\mathbf{V}$ =Vecteur vitesse

ν =Coefficient de poisson

W =Fonction noyau ou fonction de Kernel

σ = Tenseur de contrainte de Cauchy

π = Densité volumique de production de chaleur

λ = Coefficient d'élasticité de lamé

μ = Coefficient de cisaillement élastique de Lamé

$\dot{\lambda}$ = Multiplicateur de Lagrange

Ψ =Énergie libre de Helmholtz

Π_{ij} = Viscosité artificielle

σ_y = Contrainte d'écoulement du matériau

σ_g = Contribution provenant des solutés

σ_a = Composante athermique de la contrainte seuil mécanique

σ_i = Composante intrinsèque de la contrainte d'écoulement

σ_e = Composante d'écrouissage de la contrainte d'écoulement

σ^{trial} = Contrainte trial

σ' = Contrainte effective

A = Coefficient de dilatation du matériau

δ_{ij} = Symbole de Kronecker

$\vec{\gamma}$ = Vecteur accélération réelle

ρ = Masse volumique

Ω = Domaine de définition

Φ = Fonction de forme MLS

$\mathbf{X}$ = Tenseur d'écrouissage cinématique

∇ = Opérateur gradient

$\otimes$ = Opérateur produit tensoriel

$:$ = Opérateur produit doublement contracté

Σ = Système

α = Diffusivité du matériau

Abréviations

AA Alliage d'aluminium

CEL Couplage eulérien-lagrangien

CRSNG Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada

2D Deux dimensions

3D Trois dimensions

EF Éléments finis

JC Johnson-Cook

MEF Méthode des éléments finis

RDC Recherche et développement coopératif

SPH Smoothed particle hydrodynamics

VUEL Vectorized user defined element

VUMAT Vectorized user defined material

Introduction

Le contexte

Notre travail de thèse s'inscrit dans le cadre d'un projet CRSNG-RDC de collaboration université-industrie. Différentes étapes de mise en forme d'une pièce de train d'atterrissage d'avion (figure I-1) seront modélisées. Celles-ci comprennent le forgeage à chaud en matrices fermées, un usinage grossier, un traitement thermique (mise en solution, trempe et vieillissement), un usinage de finition, du grenaillage et de l'anodisation (figure I-2). Afin de pouvoir simuler ces procédés de mise en forme, il est nécessaire de connaître les propriétés du matériau et de comprendre les différents aspects relatifs à la modélisation des procédés. L'intrant pour le forgeage est une billette extrudée de l'alliage d'aluminium 7175 en condition F (telle qu'extrudée, sans traitement thermique subséquent).



Figure I- 1 : Composante de train d'atterrissage a) après forgeage et usinage grossier, b) après usinage de finition et c) superposition de la pièce après préformage et forgeage de finition.

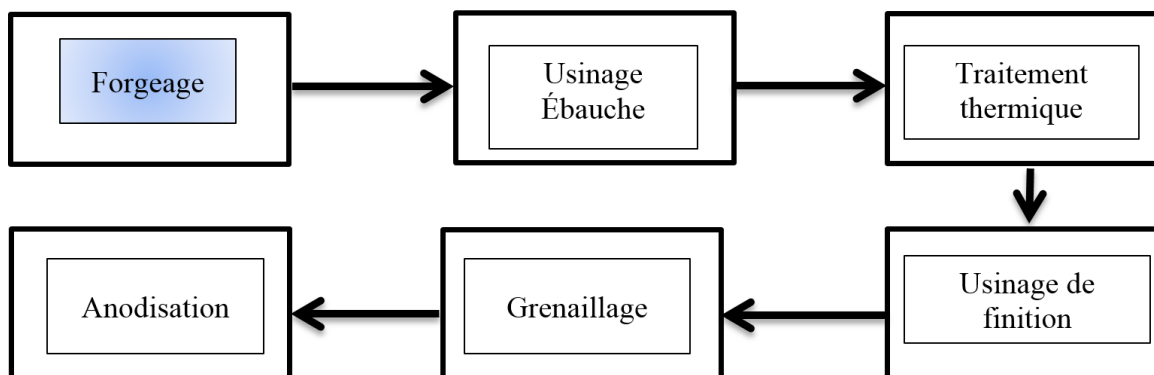


Figure I- 2 : Exemple typique de processus intégré de mise en forme d'une pièce de train d'atterrissage.

Le sujet de notre l'étude porte précisément sur la modélisation intégrée du matériau et du procédé dans les processus de formage métallique de produits industriels. Comme on est dans un contexte de l'industrie aéronautique pour laquelle les exigences de sécurité sont élevées, il en va de même pour la qualité des procédés et des produits utilisés. L'intérêt est porté sur l'élaboration de pièces de haute performance souvent très complexes, tout en cherchant à diminuer les coûts de fabrication sans compromis sur la qualité. Il est donc primordial de bien associer à chaque type de produit le procédé le mieux adapté afin de répondre aux besoins.

Dans le cadre de notre étude, le procédé d'intérêt est le forgeage à chaud en matrices fermées. Les applications aérospatiales du forgeage nécessitent des pièces performantes. C'est pour cette raison que de nombreuses applications se trouvent dans la fabrication d'avions, d'hélicoptères et d'engins spatiaux. Les pièces forgées composent notamment le moteur, le train d'atterrissage ainsi que les dispositifs de freinage de ces engins. Étant donné l'importance que revêt le critère poids dans l'ensemble de ces applications, des alliages d'aluminium et de titane sont souvent utilisés. Dans le cas à l'étude, le matériau d'intérêt est un alliage d'aluminium 7175 à haute résistance. Tel qu'on peut le voir à la figure I-3, cet alliage peut avoir différentes applications dans un avion.

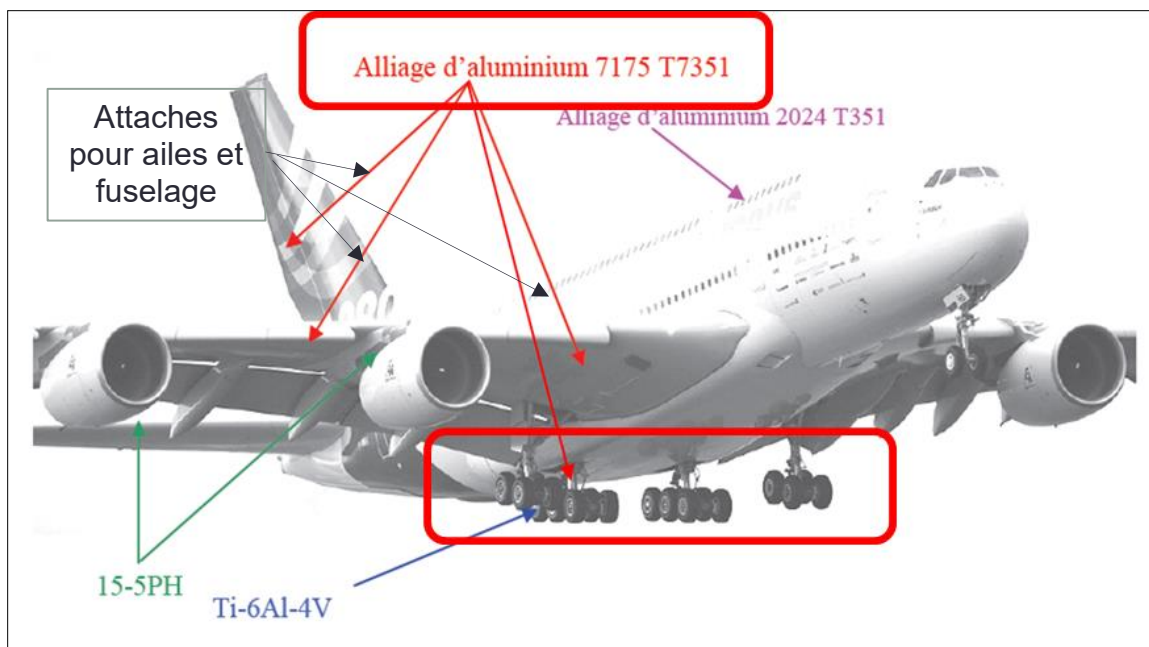


Figure I- 3: Exemple d'application des matériaux dans un avion [H4].

Étant donné que le procédé de forgeage est le premier procédé de transformation thermomécanique auquel est soumise la matière première présentée sous forme de billette (ou lopin), la qualité et les propriétés des produits semi-finis subséquents dépendront donc de la qualité et des propriétés du produit obtenu après forgeage. Il importe donc de bien maîtriser ce procédé afin de prédire le plus précisément possible la forme et les propriétés thermomécaniques et métallurgiques à la fin de cette étape du processus de fabrication. Au début de ce travail, plusieurs problèmes nous empêchaient de réaliser cet objectif :

- connaissances insuffisantes sur le procédé de forgeage utilisé et son contrôle, et sur l'outillage et sa cinématique pendant le procédé,
- connaissances insuffisantes de l'alliage AA7175 et de ses propriétés mécaniques et métallurgiques évolutives au cours du forgeage,
- difficultés relatives aux outils de simulation numérique du procédé (problèmes de distorsions de maillage en éléments finis, option de simulation thermomécanique inexistante pour le cas SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) dans Abaqus).

Plusieurs travaux ont été donc requis pour comprendre et maîtriser chacun de ces problèmes. Une étude de l'état de l'art a permis de comprendre le procédé de forgeage dans son ensemble. Ainsi on peut définir le forgeage comme l'ensemble des techniques permettant d'obtenir une pièce mécanique en appliquant une force mécanique sur une pièce de métal (lopin), à froid ou à chaud, afin de déformer la pièce pour obtenir la forme voulue. L'opération de forge ne permet pas tout à fait d'obtenir les mêmes marges de tolérance que l'usinage, et ceci la rend inutilisable pour obtenir directement les pièces mécaniques ayant besoin d'un maximum de précision dimensionnelle.

Cependant, les pièces obtenues sont généralement plus résistantes aux contraintes mécaniques car la déformation des métaux engendre un grand nombre de phénomènes métallurgiques, autant au niveau microscopique que macroscopique. Parmi ces phénomènes on peut mentionner le corroyage, à l'origine du fibrage du métal, où le terme fibrage est utilisé par analogie avec des matériaux qui présentent réellement cette caractéristique tels que le bois ou encore certains composites. Dans le cas des métaux, il

fait référence à l'orientation globale que prend la structure métallurgique en fonction du sens d'écoulement du matériau durant sa déformation.

En particulier dans cette étude, pour bien comprendre le procédé, les questions suivantes ont été abordées :

- (i) quels sont les différents types de procédés de forgeage (à froid ou à chaud),
- (ii) quelles sont les spécificités liées à chacun d'eux, à savoir les outils, les avantages et les inconvénients,
- (iii) quelles sont les transformations qui ont lieu et dont la prise en compte est primordiale pour une modélisation complète du forgeage (transformations mécanique, métallurgique et thermique),
- (iv) quels sont les paramètres matériaux et procédés à prendre en compte lors de la mise en forme et enfin quelles sont les méthodes de simulation de l'heure et quelle est celle qui convient le mieux à la compréhension du procédé.

Face à ces questions qui soulèvent un besoin d'investigation approfondie, une étude sur la modélisation intégrée du forgeage est de toute évidence un sujet actuel et intéressant à explorer. Ainsi, nous proposons une approche séquentielle d'étude avec des objectifs de travail couvrant les différents aspects du matériau, du procédé et de la simulation du produit.

Les objectifs de la thèse

Cette thèse s'articule autour de l'intégration de la modélisation du matériau et du procédé dans le cadre du procédé de forgeage à chaud en matrices fermées. De ce fait, notre champ d'intérêt et d'investigation comporte plusieurs aspects liés au matériau, au procédé de mise en forme ainsi qu'à la modélisation numérique. La compréhension et la maîtrise de ces différents aspects passent par les objectifs suivants :

- Procéder à la caractérisation thermomécanique de l'alliage AA7175,

- Comprendre et améliorer le processus intégré du procédé qui inclut le chauffage, le forgeage multi-étage à chaud (étape de préformage et de finition) et le refroidissement,
- Comprendre et améliorer l'intégration des paramètres procédés et matériaux dans la modélisation du procédé,
- Comprendre et intégrer la prise en compte de l'évolution de la microstructure dans la modélisation du procédé,
- Étudier l'état de contraintes résiduelles après forgeage dont la présence affecte la qualité de la pièce et les moyens de diminuer les effets indésirables grâce aux traitements thermiques,
- Contribuer à l'amélioration de la méthode de simulation SPH en thermomécanique.

Le travail sur la méthode SPH est principalement motivé pour les besoins globaux du projet dans lequel s'inscrit notre travail. Afin d'avoir une intégration cohérente du matériau et du procédé à travers les différents procédés de fabrication, on s'intéresse à :

- développer un outil de simulation efficace capable de simuler de manière continue (simulation en chaîne) l'ensemble des procédés de fabrication de la composante industrielle (du forgeage au grenaillage) ; ce qui est difficilement réalisable avec ÉF à cause des problèmes de distorsion de maillage en grandes déformations.

Une revue de la bibliographie faisant ressortir les différentes contributions sur plusieurs aspects de la modélisation du forgeage au cours des dernières années permettra de situer notre travail dans le contexte de la recherche scientifique et technologique et de mettre en lumière les contributions originales de cette thèse.

L'organisation de la thèse : méthodologie

Pour répondre aux objectifs que nous avons définis, nous proposons un plan de thèse qui s'organise autour de six chapitres.

Dans le premier chapitre, on présente l'état de l'art du forgeage. Tout d'abord, une revue sur l'évolution du forgeage au cours de dernières décennies permet de montrer différentes contributions qui ont conduit à une meilleure connaissance et à une meilleure modélisation du procédé et des techniques de simulation numérique. Par la suite, on s'intéresse aux phénomènes physiques mis en jeu lors de la mise en forme par forgeage afin de comprendre l'importance de bien les intégrer dans la modélisation des lois de comportement. En ce sens, des lois thermomécaniques tenant compte des effets de la microstructure tel que le modèle de Zireilli-Armstrong, le modèle de contrainte seuil mécanique (MTS Mechanical Threshold Stress model) et le modèle de Johnson-Cook modifié sont présentés suivis du choix du modèle qui sera utilisé dans le présent travail.

Ce chapitre va par ailleurs permettre de positionner le travail présenté dans cette thèse et de faire ressortir son intérêt dans le cadre du domaine technico-scientifique.

Une fois cette étape nécessaire à la compréhension et à la contextualisation de notre travail effectué, un modèle mathématique du forgeage à chaud sera présenté au niveau du second chapitre afin de comprendre comment se traduit la mise en forme en terme de modèle mathématique. On commencera par un rappel de la théorie des grandes déformations (la cinématique des grandes déformations, les lois de conservations, et les équations d'équilibre thermomécanique, l'intégration des lois de comportement thermo-élasto-viscoplastique, la modélisation des conditions aux limites thermiques et mécaniques). Par la suite on abordera les formulations variationnelles pour une discrétisation et une mise en œuvre numérique par la méthode des éléments finis et on présentera les algorithmes d'intégration d'une loi de comportement qui sont à la base d'une sous-routine VUMAT qui sera abordée plus en profondeur au chapitre six.

Les chapitres trois et quatre résument l'ensemble des travaux expérimentaux et numériques de caractérisation du matériau et du procédé. Dans le chapitre trois, on commencera par une description des procédures de tests. Par la suite l'ensemble des résultats expérimentaux (analyse de la microstructure, de l'anisotropie, de la symétrie et du coefficient de frottement) sont présentés ainsi que les procédures d'indentification des paramètres matériaux définissant la loi de comportement choisie. Des simulations de tests

de compression axiale et latérale permettront de valider les paramètres matériaux identifiés précédemment ainsi que la méthodologie de simulation du forgeage par comparaison avec des tests expérimentaux. Afin de développer une méthodologie complète de forgeage jusqu'au refroidissement, on procède au forgeage d'une pièce simple numériquement et expérimentalement. Une étude de la microstructure est effectuée sur le produit forgé afin d'étudier l'effet de la recristallisation dynamique.

Dans le chapitre quatre, les travaux du chapitre trois sont poursuivis par une étude des contraintes résiduelles. D'abord les causes, la nature et les techniques de mesure des contraintes résiduelles sont discutées afin de comprendre la nature des contraintes en jeu et comment les approcher au niveau de la modélisation. Par la suite, les résultats simulés et expérimentaux sont présentés afin de valider nos modèles. Une section dans ce chapitre est consacrée à l'étude de la trempe et aux contraintes résiduelles de trempe afin de procéder à une validation supplémentaire de la précision de la méthodologie de modélisation adoptée pour l'étude et l'analyse des contraintes résiduelles.

Dans le chapitre cinq, l'application partielle des outils développés précédemment à la pièce industrielle sera présentée ainsi que les simulations effectuées et les conclusions qui y sont rattachées. La méthodologie de modélisation développée au chapitre 3 sera transférée au modèle présenté dans le chapitre cinq, soit : la simulation du forgeage de la composante industrielle avec la méthode CEL, l'étude du refroidissement de la composante industrielle, l'analyse des contraintes résiduelles et enfin une étude comparative des propriétés de la composante industrielle avec celles de la pièce simple après forgeage.

Et enfin, dans le chapitre six, la méthode SPH sera abordée. Ce chapitre est motivé par un besoin de développer un outil de simulation efficace sans les problèmes de distorsion de maillage rencontrés en ÉF permettant une simulation en chaîne de différents procédés de fabrication (forgeage suivi d'usinage, lui-même suivi de grenaillage etc.). Tout d'abord, un rappel de la formulation SPH classique est donné et est suivi de la présentation de la formulation SPH des équations thermomécaniques en grandes déformations (formulation SPH en mécanique des solides) en formulation lagrangienne totale. Une mise en œuvre numérique est également présentée via trois approches en vue d'une contribution pertinente dans le domaine : une formulation SPH-Abaqus améliorée, utilisant une formulation SPH

lagrangienne totale en mécanique des solides est développée et implémentée dans un code SPH-maison; par la suite le code est transféré à ABAQUS sous forme d'un élément de l'utilisateur qui exploite la structure de la sous-routine utilitaire VUEL en dynamique explicite le tout combiné à un développement d'une sous-routine VUMAT , implémentant une loi de comportement de l'utilisateur également. Une section sur les applications permet de valider l'efficacité de la formulation lagrangienne totale via des exemples académiques.

Enfin un dernier chapitre est consacré à la conclusion et aux perspectives à retenir dans ce travail. Ainsi une synthèse des travaux accomplis, un rappel des principales contributions et des principaux problèmes rencontrés et une discussion sur des points encore à développer à court et moyen terme y sont abordés.

Chapitre 1

Revue de la littérature

Dans ce premier chapitre, nous effectuons l'étude du procédé de forgeage qui comprend une revue des paramètres du procédé, des méthodes de simulation et des lois de comportement.

1.1. Introduction

Dans le présent chapitre, on présente une revue de la littérature sur le forgeage. Une section résumant des contributions pertinentes à une modélisation numérique et expérimentale efficace est présentée suivie par une analyse de différents procédés de forgeage. L'étude des phénomènes physiques à intégrer dans une modélisation complète du forgeage permettra de déterminer les principaux aspects nécessaires à une modélisation complète et précise. Une revue sur les lois thermomécaniques tenant compte des effets de la microstructure (modèle de Zireilli-Armstrong, modèle de contrainte seuil mécanique (MTS Mechanical Threshold Stress model) et du modèle phénoménologique de Johnson-Cook modifié) permettra de faire un choix du modèle à utiliser au niveau des simulations numériques.

L'objectif de ce chapitre est donc de permettre une meilleure compréhension du procédé de forgeage et de répondre aux questions suivantes : quels sont les paramètres à considérer, les lois de comportement et les techniques de simulation appropriées pour pouvoir développer une méthodologie de modélisation efficace.

1.2. Évolution de la mise en forme par forgeage

Pour la mise en forme de pièces métalliques, différents procédés sont utilisés dans l'industrie. Cependant, en fonction du type de pièces à produire, de l'envergure, de la complexité, des propriétés désirées ou encore du matériau de la pièce, de l'usage auquel le produit est destiné, le coût associé au procédé, le type de production (grande série, automatisation, faible volume, etc.), l'outillage requis, etc., il est important de faire un bon choix de procédés. Dans le cas présent, il s'agit du procédé de forgeage à chaud en matrices fermées qui est d'intérêt. Il a connu une évolution au cours des dernières décennies, tant au niveau numérique qu'expérimental avec la prise en compte intégrée des différents paramètres du procédé.

Plusieurs auteurs ont contribué au développement du procédé de forgeage et de sa modélisation au cours des dernières années. Au cours de l'évolution de la modélisation du

forgeage, plusieurs problèmes ont été identifiés et certaines solutions ont été proposées avec des résultats de plus en plus précis en fonction de l'utilisation de modèles de plus en plus réalistes et des moyens de calculs de plus en plus puissants et sophistiqués. On présente donc, dans les sections qui suivent, quelques travaux qui ont été effectués dans le domaine ainsi que les difficultés qui ont été rencontrées afin de bien positionner le cadre de l'étude et d'en dégager la pertinence. Entre autres on peut citer :

- **Les effets de la lubrification** : L'objectif principal des lubrifiants au cours du processus de forgeage est de minimiser la friction et ses effets. Dans les travaux de Jain [J1], les premiers effets de la lubrification sur le frottement des outils de forgeage ont été démontrés. Toutefois, ces travaux ne couvrent pas les différents types de forgeage ; ils n'ont été menés que pour le cas du forgeage à chaud pour des pièces axisymétriques, d'où la nécessité d'étendre l'étude à des pièces plus complexes avec des profils d'écoulement variés donnant lieu parfois à des déformations importantes qui complexifient la modélisation de la lubrification. D'autres auteurs, dont notamment Langlois et al. [L6], ont étendu l'étude au cas du forgeage à froid dans un contexte industriel. On peut également citer les travaux de Kačmarčík et al. [K2] qui ont fait l'étude des effets du frottement en fonction de la lubrification sur la forge de formage, de l'écoulement du matériau, de la qualité de surface, de la température du procédé etc. pour des exemples de mise en forme par compression et par extrusion. Cette partie de la recherche a permis de positionner la lubrification comme le troisième critère le plus important en forgeage, après le préchauffage de la pièce et la température des outils [5].

Une étude du coefficient de frottement adéquat représentant mieux la lubrification sera effectuée au chapitre 3 afin de s'assurer que la simulation reste assez représentative de la réalité.

- **La modélisation du contact outils-pièce** : Les effets de la lubrification sur le frottement des outils ayant été démontrés, la modélisation de l'interface de contact dans les outils de simulation est naturellement l'étape suivante. Les travaux menés par [H1], [B5] et [B4] s'inscrivent dans ce sens. Une technique de gestion du contact dite du maître/esclave a été

proposée par [B4] dans le logiciel de simulation FORGE3, technique qui permet de mieux garder l'efficacité de l'algorithme de résolution du problème de forgeage d'un corps déformable. Bien que cette technique présente des lacunes notamment lorsque le corps esclave a une discrétisation plus grossière que le corps maître, elle s'avère être appropriée lorsqu'une bonne discrétisation est effectuée pour les différentes pièces en interaction. On la retrouve d'ailleurs dans Abaqus et elle est recommandée pour le cas du forgeage.

- **La modélisation de l'endommagement** : Des études ont été menées par Lestriez [L3] et Mariage [M3] en vue d'intégrer le phénomène d'endommagement dans la modélisation du forgeage. Le phénomène d'endommagement est un phénomène physique important compte tenu de sa nature irréversible et mérite donc une certaine attention. Le travail de Lestriez [L3] sur la modélisation de l'endommagement ductile des métaux constitue une référence pour de plus amples explications. L'étude de l'endommagement des pièces après forgeage soumises à d'autres procédés de fabrication comme l'usinage par exemple est également un volet important, plus particulièrement dans le cas de la présente étude afin de mieux comprendre et cibler d'éventuelles fissures au niveau de la pièce en fabrication. Ce volet sort du cadre de notre étude et ne sera pas abordé dans ce travail.
- **Les contraintes résiduelles après forgeage et les traitements thermiques de pièces forgées** : Les contraintes résiduelles (distribution spatiale de contraintes auto-équilibrées sans contrainte extérieure) dans le cas des pièces forgées sont en grande partie dues aux hétérogénéités de la déformation plastique ou à la trempe (refroidissement rapide de la pièce forgée dans l'eau ou dans l'huile, dans certains cas) qui suit l'étape de forgeage [C1]. Leurs effets ont été étudiés par différents auteurs dont Caillet [C1], notamment sur la tenue en fatigue, et Bouchard et al. [B5], dans des études de dimensionnement de pièces. Ces études ont montré que les contraintes résiduelles de traction favorisent l'amorçage et la propagation des fissures en fatigue. C'est là qu'entre en jeu, en partie, l'intérêt des traitements thermiques tels que la trempe après forgeage afin de les modifier [6]. On retrouve également dans la littérature des études sur les effets des traitements thermiques de relaxation tels que les revenus; le lecteur peut se rapporter aux références [8] et [9] pour de plus amples informations. C'est plutôt le traitement de trempe qui sera abordé de

manière plus étendue dans ce travail. En effet, la trempe joue un rôle important sur la nature des contraintes résiduelles. Lors de ce processus, des transformations métallurgiques combinées au gradient thermique entraînent une modification des propriétés de la pièce qui, selon le cas, donnent lieu à des contraintes résiduelles plus ou moins importantes. C'est pourquoi, l'état des contraintes résiduelles est différent pour chaque type de pièce/matériau, d'où la nécessité de se pencher sur chaque cas de manière spécifique.

Une analyse des contraintes résiduelles expérimentales comparées aux résultats de simulation à différentes étapes de la mise en forme (après forgeage et après traitement thermique) ainsi que la méthode de mesure et les stratégies d'analyse seront présentées au chapitre 4.

- **L'évolution de la microstructure lors du forgeage :** Cette partie de la modélisation est encore beaucoup en développement et plusieurs contributions sont à remarquer au cours des dernières années. Il existe des approches physiques et statiques pour modéliser l'évolution de la microstructure lors de la déformation à chaud. Dans les approches à base physique, la microstructure et l'évolution des propriétés sont modélisées explicitement alors que dans l'approche statistique, les conditions d'opération sont liées de manière empirique à la microstructure finale [P2]. Certains auteurs, dont Furu et al. [F4], ont proposé un modèle physique décrivant le développement de la microstructure au cours de la mise en forme à chaud, modèle qui sera développé par la suite par Sellars et Zhu [S1] en appliquant le concept de l'énergie libre comme force motrice des évolutions microstructurales. J. D. C. Teixeira en 2005 [T1] a fait l'étude expérimentale et la modélisation des évolutions microstructurales au cours des traitements thermiques après le forgeage, et d'autres plus récemment en 2013, dont Q. Jin [J2] et S-H. Zhang [Z1] ont proposé des modèles permettant de prédire l'évolution microstructurale au cours du forgeage en se penchant sur les aspects métallurgiques liés au procédé. On peut également citer les travaux d'Andrade et al. [A1] portant sur la modification de la loi de comportement de Johnson-Cook par intégration des effets de la recristallisation dynamique. L'importance de ces travaux

montre qu'il y a un fort intérêt à se pencher sur cet aspect de la modélisation du forgeage, qui une fois résolu, permettrait une modélisation plus complète du procédé.

Un modèle de Johnson-Cook modifié sera présenté au chapitre 2 et validé au chapitre 3 afin d'investiguer sur les effets de la recristallisation dynamique sur l'écoulement du matériau lors de la mise en forme notamment à haute température et en grandes déformations.

- **Les logiciels de simulation numérique** : Pour mieux comprendre le procédé de forgeage et le contrôler de manière précise et peu coûteuse, il faut nécessairement se tourner vers les méthodes numériques. Elles permettent de modéliser les composants principaux du procédé, à savoir l'outillage et la pièce, et de modéliser et contrôler les paramètres procédés : le matériau et la température des pièces et des outils, la cinématique des outils, le type de chargement, etc. On se tourne alors vers les outils et les modèles de la conception mécanique assistée par ordinateur CMAO afin de simuler le procédé. Pour simuler le procédé de forgeage, il existe différents logiciels que l'on peut grouper en deux grandes catégories: des logiciels dits métiers tels que Forge et Deform, etc., et des outils généralistes tels que Abaqus, Ls-dyna, etc. Dans des outils métiers, des procédés spécifiques sont considérés et la plupart des lois de comportement particulières sont déjà implantées et l'utilisateur fournit des paramètres matériaux et procédés (Forge fournit la plupart des paramètres procédés) afin de simuler un cas donné correspondant à un contexte industriel. Dans des outils dits généralistes, les logiciels fournissent un ensemble algorithmique de base plus ou moins sophistiqué ainsi que des outils de modélisation paramétrique des procédés et des matériaux, mais l'utilisateur a beaucoup de latitude pour développer et implémenter ses propres applications (« user's subroutine ») dans leur environnement, comme par exemple développer et utiliser sa propre loi de comportement (VUMAT, UMAT), son propre élément (UEL, VUEL). Les logiciels métier ont comme avantage de bien représenter globalement la physique du procédé et de permettre d'effectuer rapidement des simulations, ce qui est un bon point de départ. Cependant, dans les logiciels de simulation généralistes, il y a un meilleur contrôle des paramètres du procédé et on arrive à des résultats plus précis pour le cas par exemple de simulations d'un modèle de

comportement spécifique. Dans le cas de notre travail, nous allons nous concentrer sur l'étude et la maîtrise d'un de ces outils à savoir le logiciel Abaqus, en raison de sa polyvalence et de sa bonne performance lors de traitement de problèmes industriels. C'est un outil largement utilisé en conception et ingénierie mécanique assistée par ordinateur [M3, L3].

- **Simulation du forgeage par la méthode des éléments finis :** La simulation par éléments finis du forgeage a connu ses débuts au cours des années 70 [S3]. L'application au domaine de l'aéronautique s'est fait au début des années 80 [S3] avec notamment Oh en 1982 et Howson et al. en 1989. La méthode des éléments finis est une méthode établie (très utilisée) dans le secteur de l'industrie et de la recherche. L'idée principale de la méthode des éléments finis consiste à représenter de façon approchée un problème physique, décrit par un ensemble d'équations différentielles avec conditions aux limites, via une approximation locale par sous domaine, chaque sous domaine étant obtenu par discrétisation du domaine matériel en des formes géométriques simples, appelées éléments finis. Cette méthode a connu de nombreuses améliorations au cours des années, notamment dans les années 80 dans le cadre de la modélisation de problèmes éléments finis 2D quasi-statiques et dynamiques avec remaillage automatique afin de résoudre les problèmes de distorsion du maillage lors de la simulation. Ces travaux ont été poursuivis et étendus en 3D par Coupez et al. [C7] au début des années 90. Des techniques automatiques telles que la méthode ALE (arbitrairement eulérien lagrangien) [G1, B1, B2] existent aujourd'hui afin de pallier aux problèmes de distorsions du maillage, notamment en grandes déformations. Toutefois, cette technique présente des limites dans le cas de pièces à géométrie complexe 3D comme c'est le cas de la composante du train d'atterrissage sous étude. De plus, la méthode ALE n'est efficace que lorsqu'un maillage unique peut être adapté de manière efficace pendant toute la durée du processus. L'avènement de nouvelles techniques de simulation dites d'analyse sans maillage, depuis quelques dizaines d'années, offre une alternative aux techniques de type éléments finis confrontées à des problèmes de fin prématurée des simulations de procédés impliquant de grandes déformations avec distorsion de maillage, des fragmentations avec multi-fissuration simultanée (UGV) ou un écoulement important de la matière [B2, Q1, 15].

- **Formulation CEL (couplage eulérien lagrangien) :** En marge de la méthode, ALE, on retrouve également la méthode CEL, pertinente pour ses qualités de simulation en grandes déformations sans distorsion du maillage [B8]. En effet, dans la méthode CEL, la description eulérienne permet aux éléments finis d’être fixés dans l'espace et le matériau peut s'écouler à travers ces éléments (la matière se déplace à l'intérieur du maillage). Par ailleurs, les structures sont discrétisées avec une formulation élément finis de type Lagrange. Les forces agissant sont transférées à la structure lagrangienne à travers le contact en eulérien-lagrangien basé sur l'algorithme de contact pénalité.

Formulation du couplage eulérien lagrangien

Dans la description eulérienne, les équations sont écrites en utilisant des dérivées spatiales temporelles et dans la description lagrangienne, des dérivées matérielles temporelles sont utilisées. La relation entre les dérivées matérielles et spatiales temporelles est [S4] :

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla\Phi) \quad (0.1)$$

où Φ est la solution arbitraire variable, $\mathbf{v}$ la vitesse matérielle et $\frac{D\Phi}{Dt}$ et $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ sont respectivement les dérivées temporelles matérielle ou particulaire et partielle.

Les équations de conservation (masse, quantité de mouvement et énergie) du domaine lagrangien transférées à domaine eulérien sont :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla\rho) + \rho\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (0.2)$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla\mathbf{v}) = \frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{f} \quad (0.3)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla e) = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \quad (0.4)$$

où ρ est la densité, σ est la contrainte de Cauchy, $\mathbf{f}$ est le vecteur de forces de volume, e est la densité volumique d'énergie de déformation et $\mathbf{D}$ le tenseur taux ou vitesse de déformation.

Les équations 0.2 à 0.4 sont alors réécrites comme suit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (0.5)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \nabla \cdot \sigma + \rho \mathbf{f} \quad (0.6)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (e \mathbf{v}) = \sigma : \mathbf{D} \quad (0.7)$$

et sont de forme générale :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot \Phi = \mathbf{S} \quad (0.8)$$

où Φ est la fonction flux de composantes $(\rho \mathbf{v}, (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \text{ et } e \mathbf{v})$, $\mathbf{S}$ le terme source de composantes $(0, \nabla \cdot \sigma + \rho \mathbf{b} \text{ et } \sigma : \mathbf{D})$ et Φ de composantes $(\rho, \rho \mathbf{v} \text{ et } e)$.

La décomposition séquentielle permet de diviser l'équation 0.8 en deux équations résolues séquentiellement :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \mathbf{S} \quad (0.9)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot \Phi = 0 \quad (0.10)$$

L'équation 0.9 contenant le terme source représente l'étape lagrangienne et l'équation 0.10 contenant le terme convectif représente l'étape eulérienne. Pour résoudre l'équation 0.10, le maillage déformé de l'étape lagrangienne est déplacé vers le maillage fixe eulérien, et le volume de matière transporté entre des éléments adjacents est calculé. La solution lagrangienne (par exemple, la masse, les contraintes, l'énergie) est ajustée pour tenir compte de l'écoulement de la matière entre éléments adjacents.

- **Simulation du forgeage par de nouvelles techniques de simulation** : le forgeage a connu également une évolution au niveau de la technique de simulation. À côté de la simulation par éléments finis, des études ont été menées au niveau des simulations avec les méthodes dites sans maillage dont la méthode SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics), (figure 1-1). La méthode SPH [F1, M5, M6, M7, W1] est une méthode récente comparée à celle par éléments finis. Elle a été introduite au cours des années 70 par Lucy, Gingold et Monaghan [M4, M5, M6, M7] pour l'étude de phénomènes d'astrophysique. Elle est l'une des premières méthodes particulières numériques en mécanique [L2]. Les premières simulations de forgeage, notamment en grandes déformations avec la méthode SPH ont été menées par Clearly et al. [C2]. Bien que ces simulations aient donné de très bons résultats et permettent de contourner les problèmes liés aux distorsions de maillages rencontrées en ÉF (SPH a une grande aptitude à suivre les déformations de surface de la pièce [C2]), elles n'étaient pas faites dans le cadre thermomécanique. M.A. Lavoie et al. [L7] a également apporté une contribution dans le développement d'une formulation SPH via un code maison sans toutefois intégrer l'aspect thermique. Dans ce sens, nous allons contribuer à l'amélioration de ce code afin de rajouter un couplage thermomécanique. Le logiciel LS-DYNA a introduit récemment cette option qui est encore en développement [L15].

Bien que la méthode SPH se présente comme une alternative à la méthode des éléments finis notamment face aux problèmes de distorsions de maillage, certains problèmes se posent :

- 1- Comme la plupart des méthodes particulières, SPH est confronté à des difficultés liées à l'application des conditions limites [L2], ce qui dans le cas du forgeage pourrait s'apparenter à l'imposition des conditions de température (cas d'Abaqus), sans laquelle la simulation thermomécanique couplée n'est pas possible. Randles et Libersky [R1] ont tenté de palier à ce problème en utilisant des particules fantômes i situées sur la frontière pour le traitement des conditions limites.
- 2- Le manque de consistance entre les particules ; une solution de ce problème a également été proposée par S. Wolf [W1] et J. L. Lacomme [L2] par l'introduction d'un facteur de correction.
- 3- La formulation SPH thermomécanique dans la plupart des logiciels commerciaux n'est pas disponible.

Des solutions à ces problèmes seront proposées au chapitre 6.

La méthode SPH est récente et est peu présente dans l'industrie. Elle offre des avantages notables en ce qui concerne la facilité au niveau de la simulation, mais elle n'est pas sans faille et des développements sont encore à faire. Certains points nécessitent encore des améliorations, notamment en ce qui concerne la formulation mixte ÉF-SPH [W1, L2] utile dans le traitement de problèmes locaux ainsi que le développement et l'application d'une formulation SPH thermomécanique avec des schémas de résolution efficace.

Dans ce sens, nous présenterons au chapitre 6, une amélioration de la méthode SPH avec un VUMAT et un VUEL thermomécanique implémentés dans Abaqus et une contribution à l'amélioration d'un code SPH maison thermomécanique.

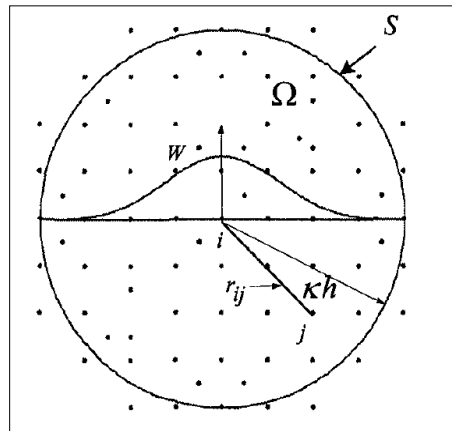


Figure 1- 1: Approximation particulaire dans le domaine de support de la fonction de lissage W d'une particule i [L5]

La figure 1-2 résume les principales contributions de quelques-uns des auteurs dont les travaux ont été présentés précédemment. La figure 1-3 fait état de l'évolution dans le temps de la simulation du forgeage.

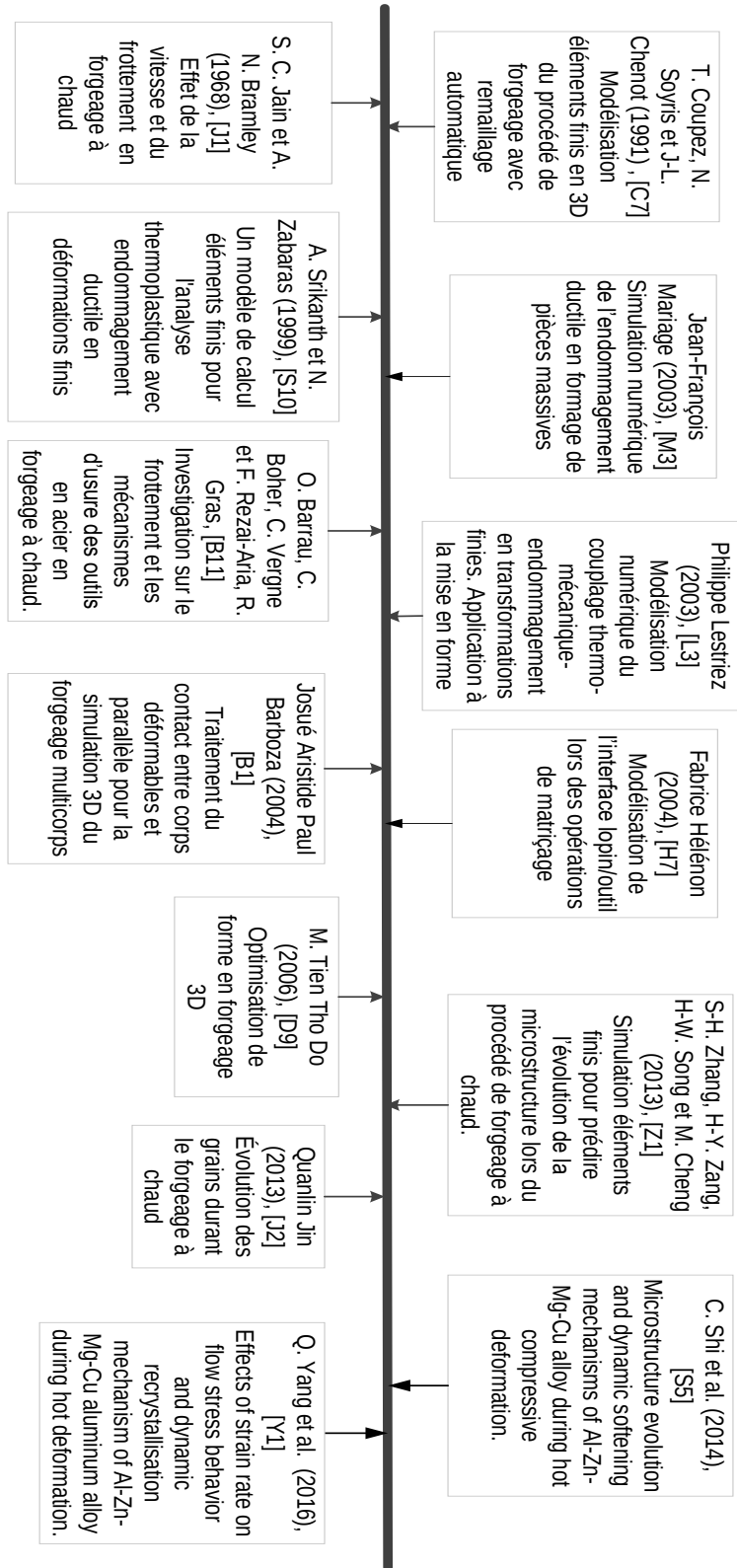


Figure 1- 2 : Quelques auteurs et leur contribution au niveau de la modélisation du forgeage.

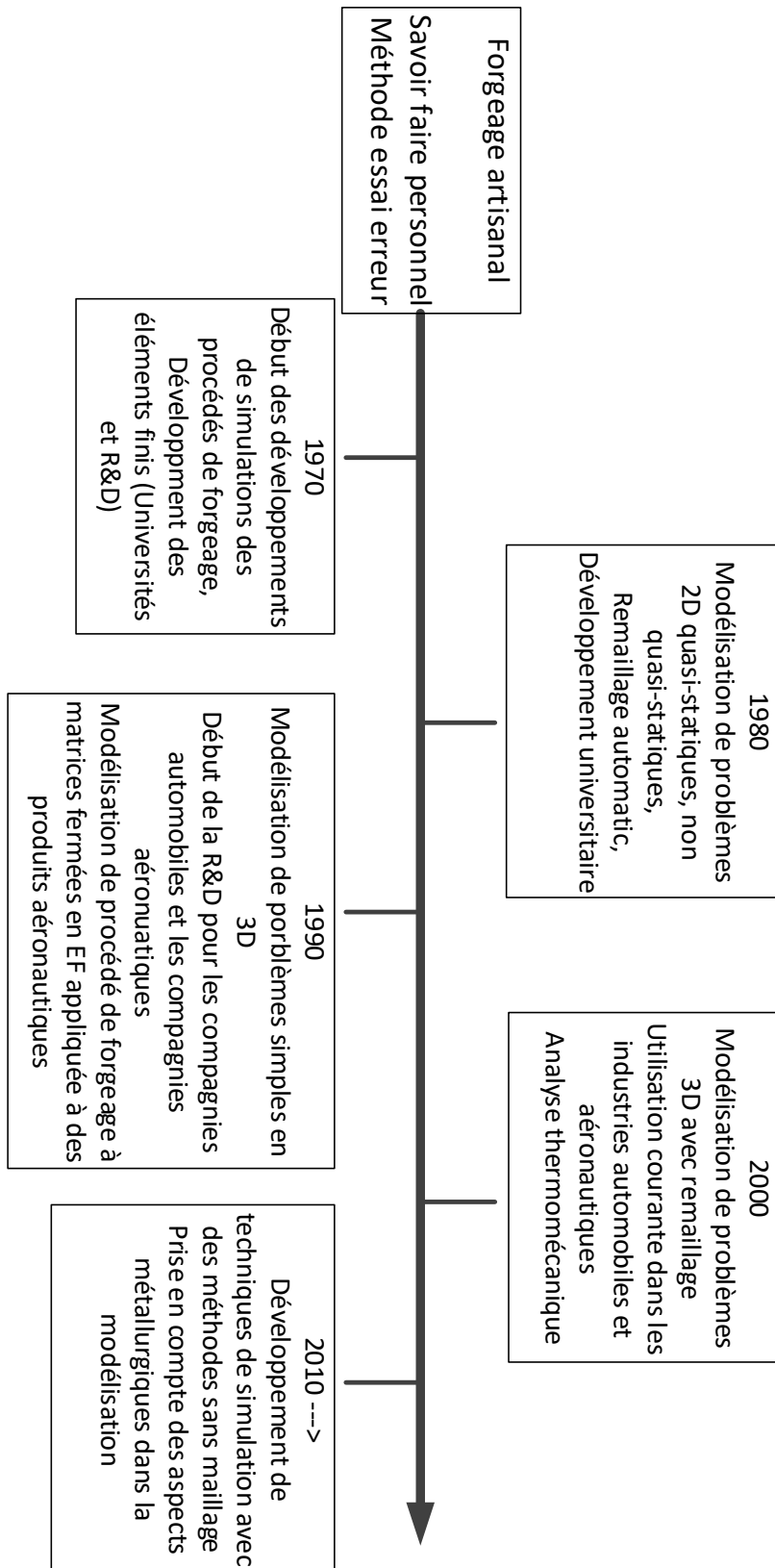


Figure 1- 3 : Évolution dans le temps de la modélisation et simulation du forgeage [K1].

Les travaux cités ci-dessous montrent différents points à considérer pour une modélisation précise du forgeage. En résumé un bon modèle de forgeage devrait aborder les points suivants et s'assurer qu'ils sont bien adressés dans une application donnée :

- effets de la lubrification,
- contact outils-pièce,
- grandes déformations thermo-élasto-viscoplastiques,
- endommagement et rupture,
- évolution de la microstructure,
- outils efficaces de simulation, soit par la méthode des éléments finis ou soit par une méthode d'analyse sans maillage.

Actuellement, des modèles accessibles au niveau des codes commerciaux comme Abaqus avec un traitement thermomécanique cohérent des mécanismes d'endommagement et de rupture et des effets microstructuraux pour une modélisation complète du procédé de forgeage restent encore à faire. Nous tenterons de procéder dans ce travail à une modélisation du forgeage incluant au mieux possible l'ensemble des différents points cités dans le paragraphe précédent.

1.3. Analyse des différents procédés de forgeage

La mise en forme de pièces mécaniques par déformation plastique à chaud ou à froid est pratiquée et étudiée depuis des siècles. Le terme forgeage désigne une famille de procédés dans lesquels la déformation du produit est réalisée par compression. En forgeage, la matière première, initialement sous forme de lingots cylindriques est déformée plastiquement (déformation irréversible) entre des matrices rigides de forme généralement complexes, et cela en une ou plusieurs étapes. Le forgeage est d'autant plus complexe qu'il fait intervenir des phénomènes physiques [V1] tels que les mécanismes de durcissement

ou d'écrouissage principalement observés en forgeage à froid, l'hétérogénéité de la déformation plastique, notamment lorsque la quantité de déformation est importante, des mécanismes d'adoucissement (recristallisation et recouvrement statique ou dynamique) associés généralement à la déformation à chaud, le phénomène d'endommagement et de rupture.

Par ailleurs, plusieurs paramètres de déformation à chaud tels que la température et sa variation en fonction du temps, la vitesse de déformation et le chemin de déformation sont à prendre en compte. Ces phénomènes sont liés à l'aspect métallurgique qui a un effet sur les propriétés mécaniques (écoulement plastique de la matière). L'aspect thermomécanique comprend quant à lui l'ensemble des analyses de forces, de contraintes, de déformations et d'écoulement de matière durant la mise en forme en tenant compte de la température; l'écoulement de la matière est influencé en partie par différents aspects tel que le frottement entre la pièce et les matrices, la forme des matrices et la température.

Il existe différents types de procédé de forgeage, dont principalement le forgeage à froid, et le forgeage à chaud. Chacun de ces types est caractérisé par un outillage, une capacité de production ou cadence et des propriétés de pièces différentes. Pour faire un choix efficace parmi ces types de procédé, une comparaison des caractéristiques est nécessaire.

La figure 1-4 montre les différents paramètres à prendre en compte lors de la mise en forme par forgeage.

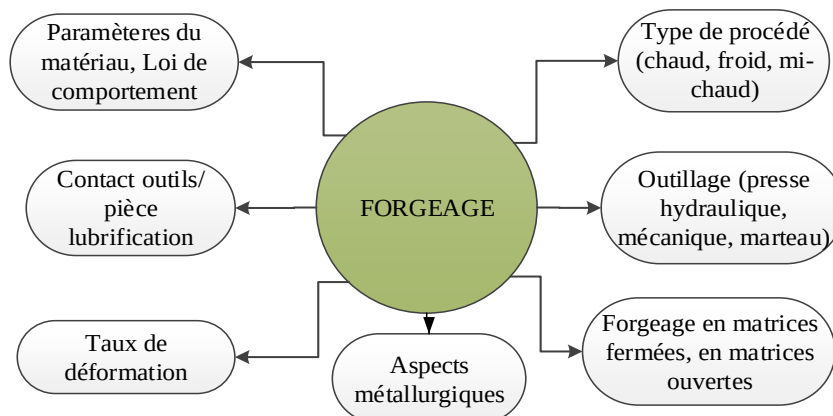


Figure 1- 4 : Différents paramètres à prendre en compte dans un procédé de forgeage.

- **Forgeage à froid**

Lorsque le rapport $T/T_m < 0,2$ à $0,5$ [B10], où T_m désigne la température de fusion du matériau, l'agitation thermique des atomes est faible, de telle sorte que les mécanismes athermiques, qui ne font pas intervenir celle-ci, sont en général prédominants. Les phénomènes de diffusion, de recouvrement et de recristallisation (réorganisation de la structure cristalline à l'état solide) sont négligeables. C'est le domaine de la déformation à froid (température pièce généralement [A6]). Généralement utilisé pour des pièces axisymétriques, le forgeage à froid (voir figure 1-5) est un procédé nécessitant un outillage plus robuste et des machines plus puissantes que les autres procédés de forgeage. Il est caractérisé par des taux de déformation de l'ordre de 0.1 à 100 s^{-1} et l'outillage est généralement simple et ne nécessite pas d'être chauffé et déplacé contrairement au cas du forgeage à chaud. Le type de machine utilisé est souvent une presse hydraulique [M1] ou une presse mécanique.

Ce procédé présente des avantages notables [1-4] tels que : peu ou pas de perte de matière, l'amélioration des caractéristiques mécaniques du fait de l'écrouissage, une cadence élevée de production, une précision élevée (quelques centièmes de millimètre) et un excellent fibrage conduisant à de bonnes caractéristiques de tenue mécanique et de fatigue.

Par contre, le procédé présente certains inconvénients importants tels que : le coût élevé des outillages et des machines, la quantité d'énergie et la grandeur élevée des forces requises et le fait que la quantité de travail à froid effectuée en une seule opération est limitée.

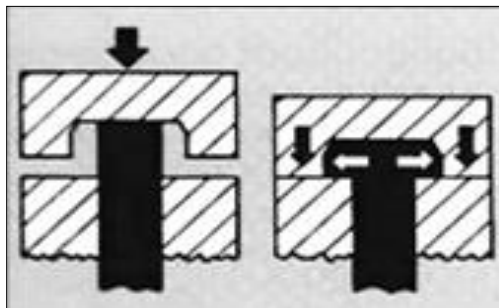


Figure 1- 5: Exemple d'illustration d'un procédé de forgeage à froid [3]

Sur la base de la complexité de la pièce à forger (composante du train d'atterrissage) et des très grandes déformations requises, ce procédé n'est pas ce qui se prête le mieux à notre étude.

- **Forgeage à chaud**

Lorsque le rapport $T/T_m > 0,5$, l'agitation thermique est au contraire élevée de telle sorte que les mécanismes activés thermiquement sont prépondérants. Les phénomènes de recouvrement et de recristallisation dynamique jouent alors un rôle très important. C'est le domaine de la déformation à chaud. Le procédé consiste à chauffer à haute température un demi-produit, appelé lopin ou billette, que l'on viendra écraser entre deux matrices en une ou plusieurs étapes [A7] (à des vitesses de déformation typiquement comprises entre 0.1 et 100 s^{-1}) dans lesquelles est reproduit le négatif de la forme à obtenir. Afin de permettre un remplissage suffisant des matrices et une limitation des efforts de compression, un volume supplémentaire sera usiné dans les matrices permettant ainsi la formation d'une bavure (« flash »).

Le forgeage se fait en matrices fermées ou ouvertes [N2]. Dans le cas de matrices fermées (closed-die forging) (voir figure 1-6), le type d'outillage utilisé est souvent complexe et on obtient une forme finale ou semi-finie du produit. Dans le cas de matrices ouvertes (open-die forging) (voir figure 1-6), l'outillage est souvent de forme géométrique simple (plates, semi-circulaires), habituellement pour la production de grosses pièces. Pour ce procédé, le chauffage de la billette (généralement dans un four), la lubrification et le déplacement des outils et/ou de la billette du point de chauffage à la presse dans des situations nécessitant leur transfert, ajoutent de la complexité à l'exécution du procédé. En ce qui concerne le type de presse, bien que les presses hydrauliques soient plus lentes que les presses mécaniques, elles sont souvent les mieux adaptées pour la production de très grandes pièces en matrices fermées, la vitesse de pressage peut être commandée, ce qui permet le contrôle de la vitesse d'écoulement du métal [S9].

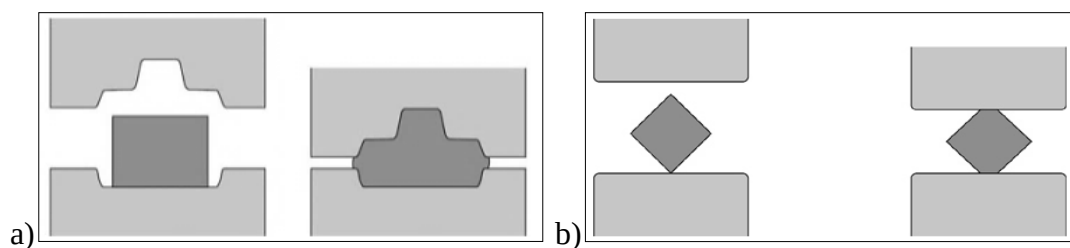


Figure 1- 6: a) Forgeage en matrices fermées, b) forgeage en matrices ouvertes [2]

Les pièces forgées à chaud offrent certains avantages dont une résistance mécanique [1] supérieure à celle des mêmes pièces obtenues par enlèvement de matière du fait du fibrage consécutif au forgeage. Le procédé est adapté pour des pièces de haute précision :

- Pièces de sécurité : trains d'atterrissage, crochets de sécurité, etc.
- Pièces sous fortes sollicitations : clés de serrage, vilebrequins, etc.

Plus spécifiquement, le forgeage de pièces en aluminium a des avantages notables dont la flexibilité du design qu'on peut obtenir. Comparé à d'autres matériaux tel que l'acier, l'aluminium ayant une grande formabilité, on peut donc produire des pièces de grande complexité. Également, les pièces en aluminium peuvent, après traitement thermique, avoir des propriétés mécaniques comparables à certaines nuances d'acier [A5].

Cependant, il y a certains inconvénients : le travail du métal se fait souvent à haute température, ce qui dans certaines situations nécessite d'importantes quantités d'énergie. Il arrive que la précision de formes et des dimensions soient médiocres [11]. Enfin, comme la pièce doit généralement être usinée ultérieurement, l'étape d'usinage va détruire une partie du fibrage et peut entraîner des déformations importantes en plus du fait que seuls les matériaux d'une certaine ductilité à chaud sont forgeables.

L'inconvénient principal pour les alliages d'aluminium est le contrôle et le maintien de la température ainsi que le transport de la pièce chauffée jusqu'à 0.6 fois la température de fusion, du point de chauffage aux matrices dans certains cas.

Sur la base des informations recueillies sur les spécificités du forgeage à chaud en matrices fermées adapté pour des pièces complexes et des pièces de haute précision possédant de bonnes propriétés mécaniques et métallurgiques et étant donné les propriétés

requis après le forgeage de la composante d'un train d'atterrissage à prendre en compte, on peut conclure que le forgeage à chaud s'adapte bien à la fabrication de la composante du train d'atterrissage.

En effet, la forme complexe du produit (les machines et outils de mise en forme), les exigences thermomécaniques du produit (de très bonnes propriétés thermomécaniques, la bonne tenue en fatigue, les coûts de mise en forme, etc.), la logistique (déplacement de la billette et des outils qui sont de grande envergure à froid ou à chaud) et la complexité du procédé sont autant de facteurs importants à prendre en compte dans la mise en œuvre du procédé.

1.4. Les phénomènes physiques

La déformation du métal est un phénomène complexe qui fait intervenir différents mécanismes. Certains de ces mécanismes, bien que d'une grande importance vis-à-vis de la modélisation ne sont pas souvent pris en compte dans la modélisation des lois de comportement à cause de leur complexité et des difficultés liées à leur intégration. Dans les sections suivantes on présente certains de ces mécanismes afin de mieux comprendre leur importance et leur manifestation lors de la mise en forme.

- **Les mécanismes de durcissement ou d'écrouissage**

Au sens mécanique, il s'agit de l'augmentation de la résistance du métal au cours de sa déformation irréversible (augmentation de la dureté, de la contrainte d'écoulement, changement de forme de la frontière d'écoulement,...). Au sens métallurgique, c'est la modification de la microstructure qui est causée par l'augmentation très rapide de la densité de dislocations et qui se traduit par la formation de cellules d'écrouissage, de sous-grains, etc. [V1].

- **L'hétérogénéité de la déformation plastique**

En grandes déformations ou lorsqu'il y a peu de possibilité de glissement des dislocations, la déformation peut s'effectuer par maclage ou sous forme de bandes de cisaillement (voir figure 1-7). Ces déformations sont difficiles à tenir en compte lors de la

modélisation numérique à cause de l'échelle à laquelle elles se produisent qui est de l'ordre du micron ou moins et à cause de leur complexité (figure 1-8). Généralement, l'échelle macroscopique est celle utilisée pour les travaux en génie mécanique ; dans ce travail, une investigation sera faite jusqu'à l'échelle microstructurale afin d'approfondir l'étude et comprendre ce qui se passe à plus petite échelle [V1].

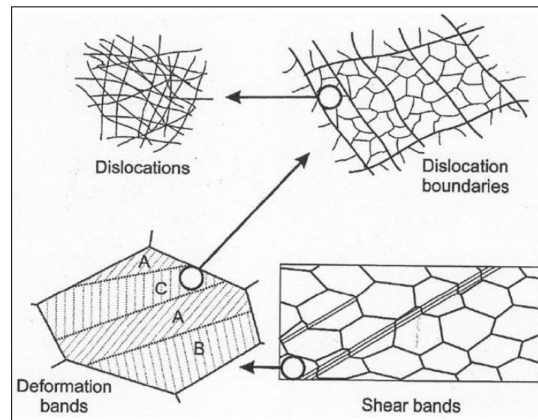


Figure 1- 7 : Représentation schématique de l'hétérogénéité de la déformation [V1]

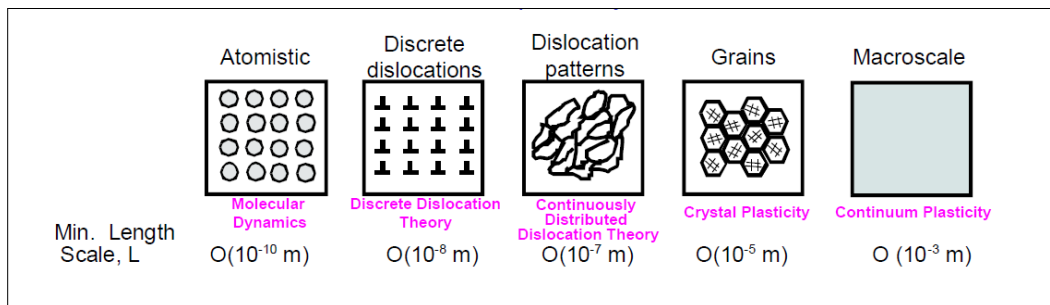


Figure 1- 8 : Échelle de résolution pour la déformation plastique

- **Les mécanismes d'adoucissement**

Ce sont des mécanismes accompagnant et/ou précédant généralement la déformation à chaud [P2, S8]. La recristallisation dynamique peut avoir lieu lors d'une déformation plastique à haute température. La recristallisation et la restauration ou recouvrement statiques ont lieu dans les procédés de forgeage pour lesquels la pièce n'est pas réalisable en une seule passe, plusieurs passes successives sont alors effectuées. Dans ce cas, la microstructure du produit final ainsi que le comportement du matériau dans la

passé suivante dépendent des mécanismes statiques apparaissant entre les passes. De manière succincte, on a donc :

1. La restauration statique [P2] au cours de laquelle la structure granulaire ne change pas mais la densité de dislocation diminue par annihilation et les dislocations résiduelles se réarrangent et forment des sous-joints très stables délimitant des sous-grains.
2. La recristallisation statique, un phénomène qui ne se produit qu'après une déformation critique, commence après un temps d'incubation et exige une température suffisamment élevée (température de recristallisation), elle entraîne un changement de la structure granulaire et se manifeste par une germination de nouveaux grains. Les grains recristallisés croissent par la suite.
3. La recristallisation dynamique qui peut être de nature continue ou discontinue [P2] et qui a une influence sur la taille des grains, leur morphologie et la texture cristalline. Elle s'opère également après un seuil de déformation/contrainte. Dans le cas de la recristallisation discontinue, les cristallites sont de véritables nouveaux grains, disposés en collier aux anciens joints de grains (structure en collier) alors que dans le cas de la recristallisation continue, on note dans l'ensemble du matériau la présence de nouveaux grains contenant une structure relativement équiaxe de sous-grains [S8].

Les évolutions microstructurales (figure 1-9) pendant la déformation à chaud sont essentiellement des combinaisons de l'écrouissage avec la restauration dynamique et avec la recristallisation dynamique.

Lorsque les dislocations sont très mobiles, des sous grains se forment à l'intérieur des grains initiaux, c'est à dire des cellules contenant peu de dislocations et désorientées les unes par rapport aux autres de quelques degrés. Pendant la suite de la déformation, les sous-grains se détruisent et se reforment continuellement lors d'une étape appelée repolygonisation, avant d'atteindre un état quasi-stationnaire qui repose sur un équilibre entre la création de dislocations, et l'arrangement et l'annihilation de dislocations.

L'ensemble de ces phénomènes constitue les caractéristiques de la restauration dynamique [C4].

Quand les sous-grains adjacents présentent des désorientations importantes (supérieures à 15°), on peut alors parler de développement de grains nouveaux et de processus de recristallisation dynamique.

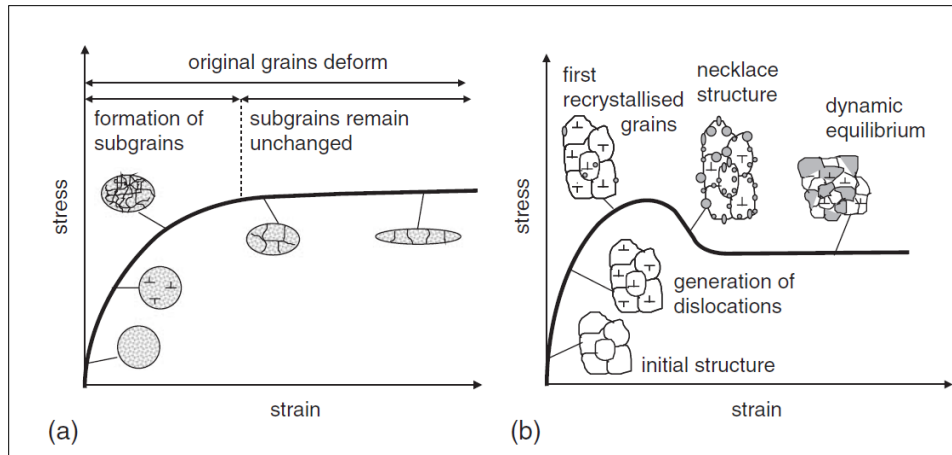


Figure 1- 9 : Évolution de la microstructure durant (a) la déformation à chaud d'un matériau subissant de la restauration et (b) la déformation à chaud d'un matériau subissant de la recristallisation [V3].

- **Paramètres de la déformation à chaud**

Il s'agit de comprendre les paramètres dont dépendent les contraintes nécessaires pour induire une déformation à chaud, et les structures obtenues [V1] :

- La déformation ou les valeurs de déformations successives appliquées pendant différents intervalles de temps. Le temps qui sépare deux déformations joue un rôle à cause des phénomènes de restauration, de recristallisation et de précipitation.

- La température ou la variation de la température en fonction du temps : la température de préchauffage et sa durée (taille de grain initiale, mise en solution plus ou moins complète), les températures différentes auxquelles sont effectuées les déformations successives et le refroidissement jusqu'à la température ambiante.

- Les vitesses de déformation : la restauration et la recristallisation de la vitesse de déformation.
- Les trajets de déformation : la plupart des lois d'écrouissage supposent que la contrainte d'écoulement ne dépend que de la déformation équivalente, et non de la manière dont celle-ci a été imposé au matériau. Des études expérimentales ont montré que cela ne constitue qu'une approximation qui peut introduire des erreurs surtout dans le cas d'un changement brusque du chemin de déformation. C'est le cas du forgeage multi-passes.

Parmi les phénomènes physiques, il y a également les phénomènes d'endommagement et de rupture qui ne sont pas pris en compte dans le présent travail.

Au regard des différents phénomènes physiques, des transformations qui ont lieu lors de la déformation et des différentes échelles auxquelles ils se produisent, on voit toute la complexité du processus de modélisation du procédé de forgeage. Ceci rend la tâche de simulation complexe à son tour, car plusieurs aspects doivent être pris en compte ainsi que leurs interactions et couplages [L3, G2]. Pour ce faire, on se réfère aux lois de comportement traitées dans la section suivante.

1.4.1. Lois de comportement : Évolution de la microstructure

Il y a différentes possibilités de modélisation d'une loi de comportement en fonction des domaines d'investigations (figure 1-10). Dans le domaine d'analyse des structures, il existe des lois macromécaniques et des lois micromécaniques.

L'intérêt des lois micromécaniques par rapport aux lois macromécaniques se situe au niveau de la précision acquise, car le domaine d'investigation passe de l'échelle macroscopique (structure) à l'échelle microscopique (grain). Ce changement d'échelle permet de mieux comprendre et de mieux capter le comportement du matériau à l'échelle du grain. Ce qui permet une meilleure compréhension de l'amorçage et de l'évolution des phénomènes physiques dont nous avons parlé à la section 1.4.

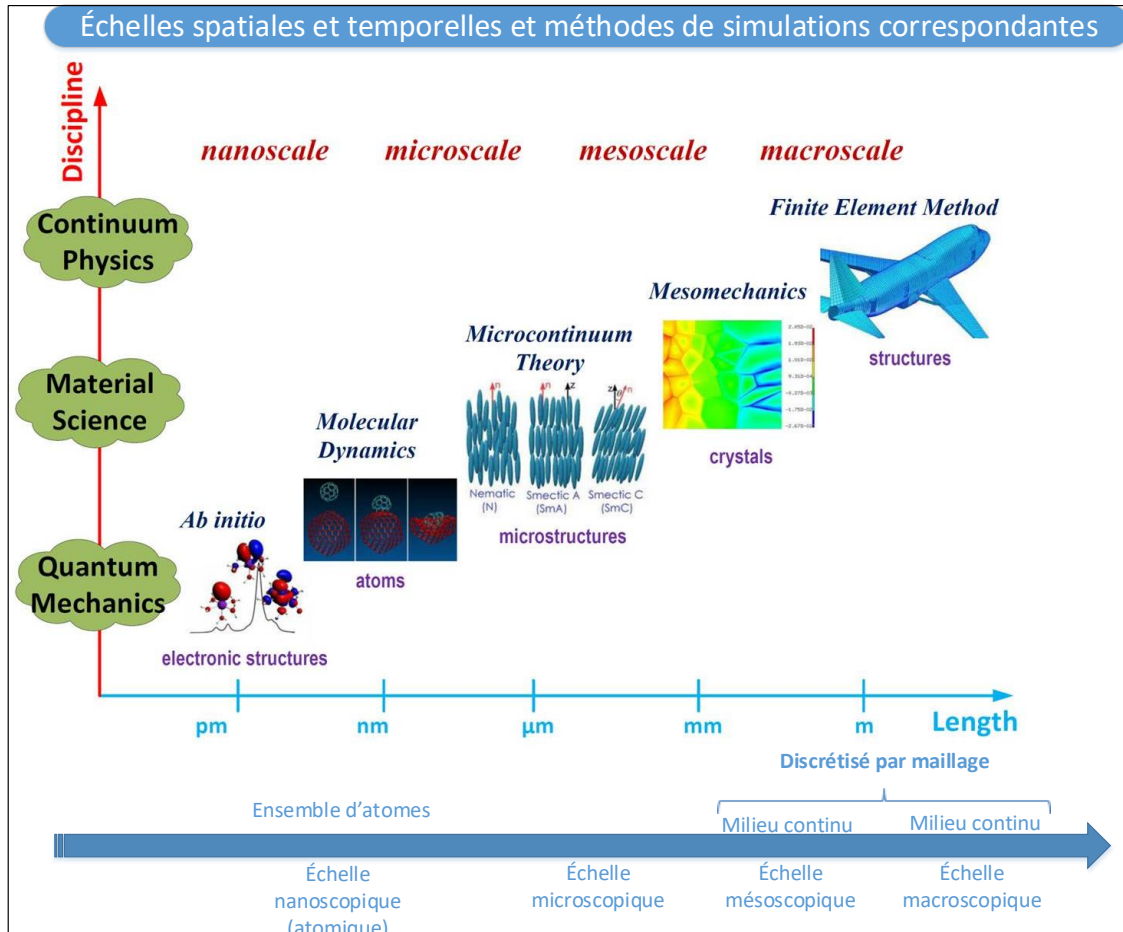


Figure 1- 10 : Échelles spatiales et temporelles et méthodes de simulations correspondantes [10]

En effet, la loi de comportement dépend des mécanismes fondamentaux de la déformation plastique en relation avec des évolutions de microstructure à l'intérieur des grains. Dans ce sens, plusieurs études sur la compréhension et la modélisation des évolutions microstructurales ont été menées au cours des dernières années. On rappelle les travaux de Sellars et Zhu [S1] sur la modélisation des microstructures des alliages d'aluminium au cours de procédés thermomécaniques. Ils se sont penchés sur la modélisation de l'évolution des structures de dislocation ainsi que sur la modélisation de la recristallisation statique. Également, on peut citer les travaux de Doherty et al. [D1] sur les différents aspects de la recristallisation tels que la nucléation, la croissance des grains, la recristallisation dynamique etc. Ces modèles nous permettent d'avoir une meilleure compréhension des évolutions de la microstructure et de savoir comment les modéliser. Cependant, il s'agit de modèles particuliers, pas forcément accessibles dans les différents

logiciels commerciaux de mise en forme. D'autres auteurs se sont également penchés sur cet aspect, soit par modification de lois déjà existantes ou à partir de développement de codes maison orientés sur les besoins de chaque auteur. Notre travail rejoint cette dernière catégorie, en ce sens que nous allons nous intéresser à la modification de la loi de comportement de loi de Johnson-Cook que nous aborderons à la section 1.4.2.

Microstructure des matériaux déformés

a) État de déformation

On retrouve deux mécanismes de déformations dans les métaux cubiques (ex : CFC) tels que les alliages d'aluminium. Il s'agit de la déformation par glissement et de la déformation par maclage. La déformation par glissement survient généralement lorsque l'énergie de défaut d'empilement est importante alors que la déformation par maclage a plutôt lieu pour des métaux à faible énergie de défaut d'empilement, la mobilité des dislocations dans la structure cristalline étant faible. Durant la déformation, la microstructure du matériau change, on observe un changement de la forme des grains et une augmentation de la superficie des joints de grains. Les joints de grains jouant le rôle d'obstacle au mouvement des dislocations, cela confère aux matériaux avec des grains fins une meilleure dureté. Lors des mouvements des dislocations, il s'opère le phénomène de déformation plastique qui est par la suite essentiellement converti en chaleur. Une partie de cette énergie provoque des évolutions microstructurales durant et après la déformation. Quant à l'énergie acquise lors de la déformation, elle est stockée dans le matériau sous forme de dislocations et ces dernières sont thermo-mécaniquement instables.

b) Transformation de la microstructure et croissance des grains

La microstructure influence largement les propriétés des matériaux. Elle dépend de la chimie du matériau et de toute la gamme de transformation, les procédés de mise en forme et les traitements mécaniques et thermiques. La microstructure finale du matériau est conditionnée par l'ensemble des gammes de fabrication, les déformations plastiques des grains, les phénomènes de restaurations et de recristallisation [P2].

L'évolution des propriétés microstructurales lors de la déformation à chaud des alliages d'aluminium a généralement lieu en deux étapes :

1. une évolution dynamique qui a lieu pendant le procédé de mise en forme, et
2. une évolution statique pendant le processus de refroidissement après la déformation.

Quant à la croissance des grains, elle se fait par migration des joints de grains dans le but de minimiser l'énergie stockée dans les joints [P2].

Ces dernières années, des modèles basés sur une approche physique de la modélisation de l'évolution de la microstructure ont été présentés. Parmi ces modèles, on retrouve certains qui ont été énoncés à la section 1.2. Il s'agit entre autres du modèle utilisé par Sellars et Zhu [S1] qui présente l'évolution de la microstructure lors de la déformation à chaud pour les variables d'état comme la température et la déformation plastique. Parvizian [P2] a utilisé un modèle basé sur la saturation des paramètres de microstructure après avoir atteint la condition quasi-statique de formage. Les paramètres de microstructure sont ainsi modélisés comme des variables d'état internes fonction de la température et du taux de déformation plastique. Il existe également différents autres modèles avec l'avantage d'être déjà implantés ou facilement modifiables dans les codes de calcul commerciaux. Il s'agit entre autres du modèle de Johnson-Cook modifié, du modèle de Zirelli-Armstrong et du modèle MTS (Mechanical Threshold Stress model).

1.4.2. Quelques modèles de lois de comportement tenant compte des effets métallurgiques

Trois modèles de comportement sont présentés ici. On présente un modèle phénoménologique que nous allons modifier afin de lui conférer un certain caractère physique, il s'agit du modèle de Johnson-Cook modifié et deux modèles à base physique, le modèle de Zirelli-Armstrong et le modèle contrainte seuil mécanique (MTS). Ces différentes lois de comportement se prêtent bien à la modélisation du forgeage et différentes études ont montré leur validité.

• Modèle de Johnson-Cook modifié

La loi de Johnson-Cook classique ou standard [J3] est un modèle phénoménologique, donc qui ne prend pas en compte les effets d’histoire du matériau. Elle est réputée pour sa simplicité et a l’avantage d’être déjà implantée dans la plupart des codes de calculs comme Abaqus et Ls-dyna. Afin de bénéficier de ces avantages et d’améliorer la précision de la loi, on travaillera avec une loi modifiée de Johnson-Cook qui tient compte de la recristallisation dynamique qui influence l’évolution microstructurale du matériau (évolution des grains). Le terme dynamique signifie que le processus se déclenche et agit pendant la déformation, ce qui se distingue du mécanisme de recristallisation statique qui se produit lors d’un recuit et après déformation à froid ou à chaud. À l’initiation de la recristallisation dynamique, la contrainte d’écoulement du matériau diminue. Cette diminution provient du phénomène de recouvrement, processus de réarrangement des dislocations et d’annihilation d’une certaine quantité des dislocations dans les parois cellulaires (le résultat concret de la recristallisation dynamique sur la contrainte d’écoulement sera étudié au chapitre 3). Afin d’intégrer l’effet de la recristallisation dans le modèle de comportement, un couplage entre la déformation et la recristallisation capable de traduire les différentes évolutions à l’échelle granulaire au niveau du comportement mécanique (macroscopique) résultant est nécessaire.

Pour prendre en compte la recristallisation au cours de la déformation dans le cas présent, on procède de la même manière qu’Andrade et al. [A1] qui ont modifié la loi de comportement de Jonson-Cook en ajoutant une fonction $\mathbf{H}(\mathbf{T})$ dépendante des contraintes d’avant et d’après recristallisation et de la température de recristallisation. L’intérêt d’utiliser cette loi dans la modélisation du forgeage à chaud est donc, outre sa simplicité, son accessibilité (la modification se fait via un VUMAT ou un VUEL). Elle combine l’effet de la déformation plastique au taux de déformation plastique, à la température de forgeage et aux effets de la vitesse d’érouissage. Ce qui lui confère son nouveau caractère “semi-physique”. La loi d’écoulement modifié est ainsi donnée par :

$$\sigma^y = \left[A + B(\varepsilon_p)^n \right] \left[1 + C \ln \left(\frac{\dot{\varepsilon}_p}{\dot{\varepsilon}_{p0}} \right) \right] \left(1 - \left(\frac{T - T_r}{T_m - T_r} \right)^m \right) \mathbf{H}(\mathbf{T}) \quad (1.1)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{T}) = \frac{1}{1 - \left[1 - \frac{(\sigma_y)_{rec}}{(\sigma_y)_{def}} \right] u(T)} \quad (1.2)$$

où $u(T)$ est une fonction de la température définie comme suit :

$$u(T) = \begin{cases} 0 & \text{pour } T < T_c, \\ 1 & \text{pour } T > T_c \end{cases} \quad (1.3)$$

T_c est la température à laquelle le phénomène critique de recristallisation commence (recristallisation dynamique, transformation de phase, etc.), $(\sigma_y)_{def}$ et $(\sigma_y)_{rec}$ sont respectivement les contraintes d'écoulement du matériau juste avant et juste après la recristallisation.

Les modèles de Johnson-Cook et de Johnson-Cook modifié trouvent leurs applications courantes dans la simulation de problèmes à grandes déformations tel que le forgeage [A1, G3, H2, L1], l'usinage [V2, Z2, Z3], les tests d'impact à haute vitesse tel que les barres d'Hopkinson [M2] ou les impacts de Taylor [L7, L8].

- **Modèle de Zirelli-Armstrong**

La loi d'écoulement de Zirelli-Armstrong [Z4, J4] est un modèle à base physique qui prend en compte les phénomènes microscopiques tels que la taille des grains. La loi d'écoulement est donnée comme suit :

$$\sigma^y = A + [C_1 + C_2 \sqrt{\varepsilon}] e^{\{-C_3 + C_4 \ln \varepsilon\}T} + C_5 \varepsilon^n \quad (1.4)$$

C_1 à C_5 et n sont constantes matérielles empiriques et sont souvent déterminée par des méthodes expérimentales.

$$A = \sigma_g + \frac{k_h}{\sqrt{l}} + K \varepsilon^n \quad (1.5)$$

σ_g est la contribution provenant des solutés et de la densité des dislocations initiales, k_h est l'intensité des contraintes microstructuraux, l est le diamètre moyen des grains. $K=0$ pour les matériaux de type CFC (cubique face centrée).

Ce modèle trouve également des applications courantes dans la simulation du forgeage [D4, G3], de l'usinage et des tests d'impact à haute vitesse [M2].

- **Modèle de contrainte seuil mécanique (MTS Mechanical Threshold Stress model)**

Le modèle de contrainte seuil mécanique (MTS) est un modèle à base physique développé par Follansbee et al. [F3]. Dans ce modèle, on considère qu'à une température donnée et pour un certain taux de déformation, la contrainte d'écoulement n'augmente pas au-delà d'une contrainte de saturation. Ce modèle est efficace dans la prédiction de réponses constitutives de métaux sur une large plage de températures et de vitesses de déformation [H1]. Il est basé sur la dynamique des dislocations et la théorie de l'activation thermique.

La contrainte d'écoulement est donnée sous la forme suivante :

$$\sigma_y(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}, T) = \sigma_a + (S_i \sigma_i + S_e \sigma_e) \frac{\mu(p, T)}{\mu_0} \quad (1.6)$$

où σ_a est la composante athermique de la contrainte seuil mécanique, σ_i est la composante intrinsèque de la contrainte d'écoulement due aux obstacles au mouvement des dislocations activées thermiquement, σ_e est la composante d'écrouissage de la contrainte d'écoulement, (S_i, S_e) sont les facteurs de mise à l'échelle dépendants du taux de déformation et de la température, et μ_0 est le module de cisaillement à -273 °C et à pression ambiante.

$$S_i = \left[1 - \left(\frac{k_b T}{g_{0i} b^3 \mu(p, T)} \ln \frac{\dot{\varepsilon}_{0i}}{\dot{\varepsilon}} \right)^{1/q_i} \right]^{1/p_i} \quad (1.7)$$

$$S_e = \left[1 - \left(\frac{k_b T}{g_{0e} b^3 \mu(p, T)} \ln \frac{\dot{\varepsilon}_{0e}}{\dot{\varepsilon}} \right)^{1/q_e} \right]^{1/p_e} \quad (1.8)$$

où k_b est la constante de Boltzman, b est l'amplitude du vecteur de Burger, (g_{0i}, g_{0e}) sont les énergies d'activation normalisées, $(\dot{\varepsilon}_{0i}, \dot{\varepsilon}_{0e})$ sont des taux de déformation de référence et (q_i, q_e, p_i, p_e) sont des constantes.

La composante d'écrouissage σ_e est donnée par :

$$\frac{d\sigma_e}{d\varepsilon_p} = \theta(\sigma_e) \quad (1.9)$$

Pour plus de développement par rapport à cette loi, le lecteur est invité à consulter les références de Banerjee [B2] et d'Hussaini [H1].

Le modèle MTS a été utilisé par différents auteurs pour modéliser des cas de mise en forme. Poizat et al. [P3] pour la modélisation et simulation de la découpe des tôles minces avec endommagement et critère de rupture. Dans cette étude, le modèle MTS a été combiné avec un modèle de nucléation et de croissance de cavités et comparé au modèle de Johnson-Cook, les auteurs concluent que le modèle MTS est préférable pour une meilleure compréhension du procédé de découpe, de la physique de l'endommagement et de la plasticité. Par ailleurs, Hussaini et Gupta [H1], utilisent le modèle MTS pour la prédiction de la contrainte d'écoulement pour des procédés de mise en forme tels que le roulage ou le forgeage. Toutefois, l'utilisation de cette loi nécessite plus de travail pour la détermination des paramètres comparativement au modèle de Johnson-Cook.

1.5. Choix de la loi de comportement

Nous avons présenté trois modèles de comportement applicable au forgeage. Notre choix de loi de comportement s'est arrêté sur les modèles de Johnson-Cook et de Johnson-Cook modifié pour les raisons suivantes :

- Le modèle de Johnson-Cook est déjà implémentée dans Abaqus contrairement au modèle de Zireilli-Armstrong et au modèle MTS.

- Le modèle est déjà largement utilisé en forgeage et offre de très bonnes corrélations avec les résultats expérimentaux.
- Les paramètres de la loi de comportement sont facilement déterminés à l'aide de tests de compression à différentes températures et taux de déformation.
- Et enfin, la prise en compte des effets de la microstructure par modification de la loi de comportement (prise en compte des contraintes et température de recristallisation) est réalisable à l'aide d'une sous-routine VUMAT ou par un VUEL avec Abaqus.

1.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons globalement présenté le forgeage, les différents aspects de la modélisation ainsi qu'une revue des outils de simulation numérique. Au regard de cette revue, il nous est possible de positionner le présent travail dans le contexte scientifique et technique et de dégager la pertinence de cette étude :

En effet, vis-à-vis du manque d'information au niveau de l'alliage 7175, nous allons procéder à une caractérisation du matériau sous différentes conditions afin de comprendre son comportement de manière plus précise :

- Test de compression axiale et latérale, test de traction et micrographies afin de caractériser les propriétés mécaniques, la microstructure, la symétrie et l'anisotropie du matériau.

Face aux difficultés rencontrées pour la simulation des pièces complexes en ÉF à cause des distorsions de maillage, nous allons travailler principalement avec la méthode CEL et la méthode SPH. Quelques analyses en ÉF seront présentées pour des fins de comparaison.

Bien que les méthodes CEL et SPH permettent dans le premier cas d'obtenir un maillage régulier lors de la simulation et dans le second cas de travailler sans maillage, pour le cas de pièces très complexes, on rencontre quand même des limites. Il y a notamment les coûts de calcul liés à la finesse du maillage et au nombre de particules qui

peuvent être excessifs. Pour le cas CEL, la difficulté principale réside dans le fait que les autres procédés de la chaîne de fabrication de la composante du train d'atterrissage (exemple : usinage et grenaillage) sont simulés avec des méthodes lagrangiennes, on se trouve à devoir faire un transfert de la formulation eulérienne à la formulation lagrangienne afin d'avoir une modélisation en chaîne qui soit cohérente. Ceci ne rentre pas dans le cadre de cette étude. Toutefois avec la méthode SPH il serait possible de simuler l'ensemble des procédés de fabrication de la pièce, la seule difficulté étant les ressources de calcul à prévoir.

Par ailleurs dans une perspective de modélisation complète du procédé de forgeage, on procédera à une présentation complète du processus, de la caractérisation du matériau et de la loi de comportement, à l'étude des contraintes résiduelles, en passant par le refroidissement et les traitements thermiques de trempe :

- Test de validation de la loi de comportement et de la méthode de simulation.
- Forgeage de pièce simple.
- Tests de refroidissement et de trempe : expérimental et numérique.
- Mesure de contraintes résiduelles : expérimental et numérique.

Également, en ce qui concerne l'aspect lié à l'intégration de la microstructure du matériau dans le processus de modélisation, nous proposons d'utiliser la même approche qu'Andrade et al. [A1] en caractérisant l'effet de la recristallisation dynamique de l'alliage 7175 sur les propriétés de mise en forme. Cette approche est rattachée à la loi de comportement de Johnson-Cook dont le choix a été expliqué à la section 1.5.

Dans le prochain chapitre nous traiterons des aspects de la modélisation mathématique du problème de forgeage afin de comprendre l'interaction entre les différentes équations thermomécaniques décrivant le procédé.

Chapitre 2

Formulation mathématique et numérique du forgeage

Le chapitre 2 est dédié à la modélisation mathématique du forgeage. Les notions de base de la mécanique des milieux continus nécessaires à la compréhension du comportement du matériau en grandes déformations sont présentées. Nous présentons également les formulations variationnelles lagrangiennes nécessaires à la résolution d'un problème en grandes déformations et le schéma d'intégration explicite appliqué ici.

Note : Ce chapitre rappelle des bases théoriques de la mécanique des milieux continus.

Le lecteur familier avec ces notions peut passer au chapitre suivant.

2.1. Introduction

Ce chapitre constitue un rappel essentiel des notions et concepts et permet au lecteur non averti de comprendre la démarche de modélisation thermomécanique et les activités élaborées dans le reste de la thèse.

Une bonne compréhension des bases théoriques des grandes déformations est utile pour développer des outils avancés et fiables de simulation numérique des procédés et du comportement des matériaux. Ainsi, les modèles analytiques et les équations mathématiques qui sont à la base de la modélisation numérique sont présentés dans le but d'explicitier la démarche qui va être suivie.

On présente l'étude des aspects liés à la théorie des grandes déformations thermo-élasto-viscoplastiques :

- La cinématique des grandes déformations,
- les lois de conservation, les conditions aux limites,
- l'énoncé d'une loi de comportement en grandes déformations thermo-élastoviscoplastiques,
- les formulations variationnelles pour une discrétisation et une mise en œuvre numérique par éléments finis et,
- les algorithmes de résolution.

Ainsi, dans le cadre global de ce travail, ce chapitre va concourir à répondre aux objectifs de compréhension et d'amélioration de l'intégration des paramètres procédés et matériaux dans la modélisation du procédé.

2.2. La théorie des grandes déformations

À l'échelle macroscopique, on assimile le métal à forger à un milieu continu et homogène, occupant un domaine fini Ω . Le modèle mathématique du problème est donc basé sur les équations fondamentales de la mécanique des milieux continus, à savoir les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie et de l'inégalité de l'entropie.

La mécanique des milieux continus étudie les mouvements de déformations subis par un corps continu sous l'action des efforts extérieurs (chargement mécanique (forces ou déplacement imposés), chargement thermique (effort thermique et température), etc.).

Pour comprendre les phénomènes qui interviennent lors de la déformation d'un corps matériel en mouvement, une description du domaine grâce à une loi d'évolution au cours du temps des points matériels constituant le corps est nécessaire. Dans ce travail, trois types de formulation seront abordées, la formulation eulérienne qui décrit le mouvement par rapport à la configuration actuelle à l'instant t , la formulation lagrangienne classiquement utilisée en mécanique des solides qui décrit le mouvement par rapport à la configuration de référence initiale connue à l'instant initial t_0 et une formulation couplant la méthode lagrangienne avec la méthode eulérienne.

Dans le cas de la formulation lagrangienne, il est possible d'utiliser la formulation lagrangienne totale ou la formulation lagrangienne actualisée qui sont établies à partir des notions de base de la mécanique des milieux continus pour la résolution des problèmes en grandes déformations. Dans la formulation lagrangienne actualisée, la configuration de référence est celle qui est la plus récemment calculée, elle fait intervenir le tenseur des contraintes de Cauchy σ . Quant à la formulation lagrangienne totale, la configuration de référence est la configuration initiale ou de base, toutes les grandeurs sont exprimées dans le repère d'origine, elle fait intervenir le pseudo-tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff-2.

2.2.1. Cinématique des grandes déformations

Au temps t , un point P_0 occupant une position X à l'instant t_0 , subit un déplacement $\vec{u}$ qui l'amène à P_1 , donc :

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{u}(X, t) \quad (2.1)$$

Pour matérialiser la déformation, on étudie la transformation d'un vecteur « matériel », ayant origine et extrémité confondues avec des points matériels. Toutefois l'état de déformation n'étant généralement pas homogène dans la matière, il faut utiliser des points matériels infiniment voisins afin de bien caractériser la déformation au voisinage d'un élément matériel. Nous sommes ainsi amenés à considérer la transformation suivante [G2] :

$$d\vec{X} \rightarrow d\vec{x} \quad (2.2)$$

qui transforme un élément de matière non déformée $d\vec{X}$ en un élément déformé $d\vec{x}$.

On peut voir cette transformation dans l'espace sur la figure 2-1 et la figure 2-2 et on écrit les relations suivantes pour lier les variables dans les deux configurations :

$$x_i = x_i(X_j, t) \quad \text{ou} \quad X_I = X_I(x_j, t) \quad (2.3)$$

où $X_j, j = 1, 2, 3$ et t sont appelés variables ou coordonnées de Lagrange dans la première équation. Et dans la deuxième, $x_j, j = 1, 2, 3$ et t sont appelés variables ou coordonnées d'Euler.

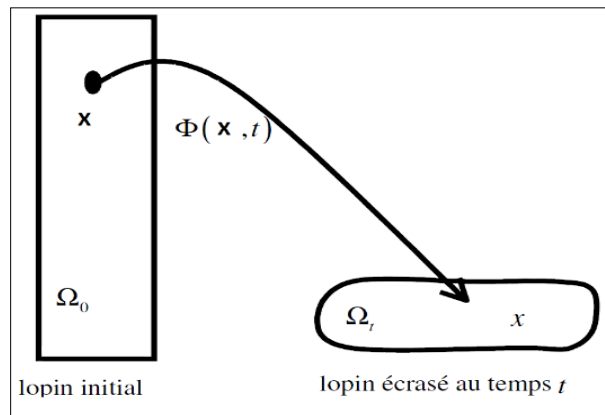


Figure 2- 1 : Description d'un mouvement [B1]

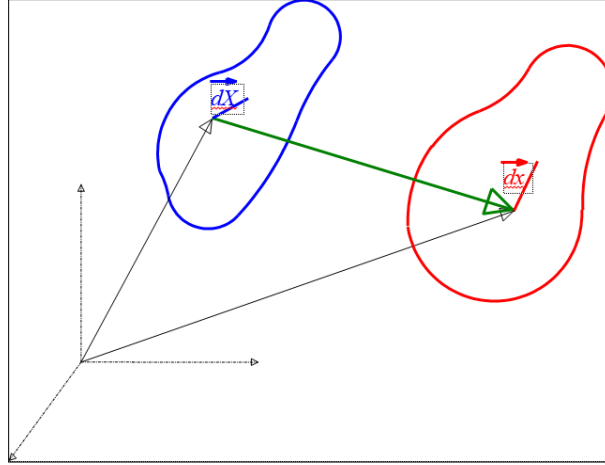


Figure 2- 2 : Transformation d'un vecteur « matériel » [G2]

Dans la littérature, la relation entre les quantités dans la configuration matérielle et la configuration spatiale est souvent exprimée en termes de transport convectif avant ou «push forward » et de transport convectif arrière ou « pull back» [B3]. Par exemple, le vecteur spatial élémentaire $d\vec{x}$ peut être considéré comme le transport convectif avant du vecteur matériel élémentaire $d\vec{X}$.

$$dX_I = \frac{\partial X_I}{\partial x_j} dx_j \quad \text{et} \quad dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_J} dX_J \quad (2.4)$$

Ces relations permettent d'introduire les composantes d'un tenseur défini par :

$$dx_i = F_{ij} dX_j \quad \text{avec} \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (2.5)$$

De sorte que l'on peut donc écrire :

$$d\vec{x} = \mathbf{F} d\vec{X} \quad (2.6)$$

Ce qui implique :

$$d\vec{X} = \mathbf{F}^{-1} d\vec{x} \quad (2.7)$$

Le tenseur $\mathbf{F}$ qui apparaît est appelé « *Tenseur gradient de déformation* » ou encore « *Application linéaire tangente* ».

À partir de la définition du gradient d'un champ vectoriel, on introduit le gradient par rapport aux coordonnées matérielles du champ de déplacement, $\vec{\nabla}_x u$ tel que :

$$\vec{u}(X + dX, t) - \vec{u}(X, t) = \vec{\nabla}_x u \cdot d\vec{X} \quad (2.8)$$

Et le tenseur gradient de déformation peut alors s'exprimer en termes du gradient de déplacement, comme suit :

$$\vec{F} = \vec{1} + \vec{\nabla}_x u \quad (2.9)$$

Ce tenseur permet de traduire le mouvement local d'un milieu continu. On le représente en composantes cartésiennes de la façon suivante :

$$F_{iI} = \delta_{iI} + \frac{\partial u_i}{\partial X_I} \quad (2.10)$$

où l'indice i indique la configuration actuelle et l'indice I la configuration initiale.

Comme $\vec{F}$ n'est pas une bonne mesure de déformation [G2], on introduit le théorème de décomposition polaire pour séparer les mouvements de corps rigides des mouvements de déformation pure. Ainsi, pour chaque point $X \in C^0$, il existe une transformation orthogonale $R(X)$ appelée tenseur de rotation pure telle que :

$$F_{iI} = R_{iJ} U_{JI} = V_{ij} R_{jI} \quad (2.11)$$

où U et V sont les tenseurs de déformation pure, à droite et à gauche, respectivement.

2.2.1.1. Exemple de description cinématique [G2]

Pour caractériser les déformations d'un domaine matériel, il faut alors considérer les variations entre deux configurations, c'est-à-dire la distance existant initialement entre deux points matériels arbitraires. Ceci amène à considérer les variations du produit scalaire de deux vecteurs « matériels ». Le changement du carré de la longueur dL d'un vecteur matériel $d\vec{X}$, qui devient dl avec comme vecteur matériel $d\vec{x}$ après déformation, est utilisé comme mesure de déformation. On obtient, si la mesure est faite par rapport à la configuration initiale, en coordonnées cartésiennes :

$$(dl)^2 - (dL)^2 = dx_i dx_i - dX_I dX_I = 2E_{IJ} dX_I dX_J \quad (2.12)$$

ou bien si la mesure est faite par rapport à la configuration actuelle :

$$(dL)^2 - (dl)^2 = 2e_{ij} dx_i dx_j \quad (2.13)$$

Les carrés des longueurs $(dL)^2$ et $(dl)^2$ correspondent aux vecteurs matériels dans la configuration de référence C^0 et dans la configuration spatiale C^t , respectivement. $\mathbf{E}$ et $\mathbf{e}$ sont les tenseurs de déformation de Green-Lagrange (matériel) et d'Almansi-Euler (spatial) respectivement et qui sont donnés, en terme du gradient de déformation, par :

$$E_{IJ} = \frac{1}{2} (F_{kI} F_{kJ} - \delta_{IJ}) = \frac{1}{2} (C_{IJ} - \delta_{IJ})$$

et

$$(2.14)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - F_{Ki}^{-1} F_{Kj}^{-1}) = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - b_{ij})$$

où $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2$ et $\mathbf{b} = \mathbf{c}^{-1} = \mathbf{V}^2$ sont les tenseurs de dilatation ou encore de Cauchy-Green droit et de Cauchy-Green gauche respectivement et δ_{ij} est le symbole delta de Kronecker. $\mathbf{C}$ est défini dans la configuration de référence alors que $\mathbf{b}$ est défini dans la configuration actuelle. $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ sont des tenseurs d'élongations pures droites et gauches respectivement.

Aussi pour définir une mesure de déformation vraie, on considère l'évolution du produit scalaire de deux vecteurs spatiaux $d\vec{x}_1$ et $d\vec{x}_2$ de la configuration déformée associés aux vecteurs matériels $d\vec{X}_1$ et $d\vec{X}_2$ de la configuration de référence non déformée tel que :

$$d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_2 = d\vec{X}_1 \cdot \mathbf{C} d\vec{X}_2$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 \quad (2.15)$$

Il est également possible de définir un tenseur de déformation fini par rapport à la configuration déformée, appelé tenseur de déformation pure de Cauchy Green gauche :

$$d\vec{X}_1 \cdot d\vec{X}_2 = d\vec{x}_1 \cdot \mathbf{b}^{-1} d\vec{x}_2$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2 \quad (2.16)$$

Le changement du produit scalaire par rapport à la configuration non déformée, peut donc être exprimé soit en fonction des vecteurs matériels et d'un tenseur $\mathbf{E}$ appelé, tenseur de déformation de Green-Lagrange ou tenseur de déformation de Green.

$$\left(d\vec{X}_1 \cdot d\vec{X}_2 - d\vec{X}_1 \cdot d\vec{X}_2 \right) = d\vec{X}_1 \cdot 2\mathbf{E} d\vec{X}_2, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (2.17a)$$

ou soit en fonction des vecteurs spatiaux et d'un tenseur $\mathbf{e}$ appelé, tenseur de déformation d'Almansi-Euler :

$$\left(d\vec{X}_1 \cdot d\vec{X}_2 - d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_2 \right) = d\vec{x}_1 \cdot 2\mathbf{e} d\vec{x}_2, \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1}) \quad (2.17 b)$$

2.2.2. Description des tenseurs des contraintes

- Tenseur des contraintes de Cauchy

Le tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ (tenseur eulérien) permet de mesurer l'effort $d\mathbf{f}$ actuel exercé sur un élément d'aire $d\partial\Omega$ de la configuration actuelle C_t .

$$d\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} \vec{n} d\partial\Omega \quad (2.18)$$

où $\vec{n}$ est la normale à l'élément d'aire considéré sur la configuration actuelle.

- Tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff

Le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff $\mathbf{P}$ permet de mesurer l'effort actuel $d\vec{f}$ exprimé sur la configuration de référence C_0 :

$$d\vec{f} = \mathbf{P} \vec{n}_0 da_0 \quad (2.19)$$

où $\vec{n}_0$ est la normale à l'élément d'aire da_0 considéré sur la configuration de référence. Ce tenseur n'est pas forcément symétrique, on introduit le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff $\mathbf{S}$ lagrangien et symétrique défini comme suit :

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} \quad (2.20)$$

Il est lié au tenseur des contraintes de Cauchy par :

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \quad (2.21)$$

où J est le déterminant du gradient $\mathbf{F}$:

$$J = \det \mathbf{F} \quad (2.22)$$

2.3. Lois de conservation

La mécanique des milieux continus repose tout autant sur des lois ou des principes de la physique que sur certaines observations expérimentales. L'évolution d'un domaine matériel est souvent l'occasion d'échanger avec le milieu extérieur et ces échanges sont réglementés. Ainsi en plus de la loi fondamentale de la mécanique, les variations entre les domaines sont assujetties aux principes de la thermodynamique. Le premier principe permet de traduire la conservation de l'énergie, il se présente sous la forme d'une égalité, alors que le second principe de la thermodynamique ne sert qu'à constater l'impossibilité que l'on a à réaliser certaines transformations, il est alors donné par une inégalité (inégalité de l'entropie) [G2]. A ces trois lois, on doit impérativement ajouter la loi de conservation de la masse qui se traduit sous forme mathématique par l'équation de la continuité. Il est courant en mécanique des milieux continus d'exprimer ces lois soit sous forme globale, c'est à dire écrites pour l'ensemble du domaine matériel au complet, ou soit sous forme locale, c'est à dire sous forme d'équations différentielles valables en chaque point du domaine.

2.3.1. Expression générale d'une loi de conservation

D'une manière générale, une loi de conservation exprime un bilan d'une grandeur tensorielle $\mathbf{A}$ à laquelle on peut associer différentes mesures caractéristiques comme :

- une densité volumique dans le domaine considéré : $\mathbf{a}$

- une densité volumique produite par unité de temps dans le domaine considéré : $\mathbf{a}_v$
- une densité surfacique associée au flux de $\mathbf{A}$ entrant à travers la frontière du domaine : $\mathbf{a}_s$

En utilisant l'opérateur dérivée matérielle $\frac{d}{dt}$, la loi de conservation peut alors se mettre sous la forme générale :

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{a} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{a}_v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{a}_s d\partial\Omega \quad (2.23)$$

Cette équation traduit le fait que la variation de la grandeur $\mathbf{A}$, au cours de l'intervalle de temps dt , est égale à la somme de la quantité produite (algébriquement) à l'intérieur du domaine Ω et de la quantité entrant (algébriquement) à travers la frontière $\partial\Omega$ du domaine.

2.3.2. Conservation de la masse

Le principe de conservation de la masse, en mécanique classique, postule qu'il n'y a ni apparition ni disparition de matière. En conséquence la variation de la masse totale M au cours du temps est nulle, ce qui se traduit par :

$$M = \int_{\Omega} \rho d\Omega \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega = 0 \quad (2.24)$$

Selon l'approche Lagrangienne, on peut montrer que la conservation de la masse se traduit par :

$$\rho_0 = \rho J \quad (2.25)$$

Selon l'approche Eulérienne, l'équation de la conservation de la masse se traduit par :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(\vec{X}, t) d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} d\partial\Omega = 0 \quad (2.26)$$

Et s'écrit localement en appliquant le théorème de la divergence, comme suit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.27)$$

2.3.3. Loi fondamentale de la mécanique ou conservation de la quantité de mouvement

Il existe plusieurs formulations de la loi fondamentale de la mécanique. Suivant l'énoncé choisi, ce qui est axiomatique dans un cas devient théorème dans un autre cas. Toutes ces formulations (principe fondamental de la mécanique, principe de moindre action, principe des puissances virtuelles) sont équivalentes. Toutefois suivant l'application traitée, certaines formes peuvent être plus intéressantes que d'autres [G2].

De façon classique, l'énoncé du principe fondamental de la mécanique peut s'exprimer comme suit : « Il existe au moins un repère R_g , dit galiléen, et une chronologie, dite absolue, tels que, à chaque instant et pour toute partie Ω d'un système Σ , la dérivée par rapport au temps du torseur cinétique galiléen est égale au torseur des actions extérieures s'exerçant sur Ω ».

Pour pouvoir exploiter le principe fondamental de la mécanique, on définit une représentation des efforts appliqués à toute partie Ω d'un système Σ . On classe alors ces efforts suivant deux types :

- (i) Les efforts exercés sur Ω par les systèmes extérieurs au système Σ ; on parle alors d'efforts extérieurs.
- (ii) Les efforts exercés sur Ω par les parties de Σ extérieures à la partie Ω ; c'est-à-dire, les efforts de contact.

Généralement, les efforts extérieurs sont dus à des actions à distance telles que la pesanteur, les forces électromagnétiques, les forces d'inertie. Ceux-ci sont souvent connus et leur modélisation ne pose pas de problème. On les supposera représentables par une densité massique de force $\vec{f}(M, t)$.

Pour la modélisation des efforts de contact (voir la figure 2-3), on passe par une axiomatique. Comme il existe plusieurs modèles employés suivant les domaines d'études, nous nous contenterons d'exploiter le postulat de Cauchy, qui conduit à la représentation la plus fréquente de l'état de contrainte en un point matériel : « Les efforts exercés sur une partie D d'un milieu continu, par le complémentaire de Ω , dans le système Σ , peuvent être représentés par une répartition surfacique de forces. Cette densité surfacique ne dépend du domaine considéré que par la normale extérieure au domaine pour le point d'étude et elle est représentée par un vecteur du type $\vec{T}(M, \vec{n})$ appelé vecteur contrainte en M dans la direction $\vec{n}$ ». Une représentation de ce vecteur est donnée sur la figure 2-4 :

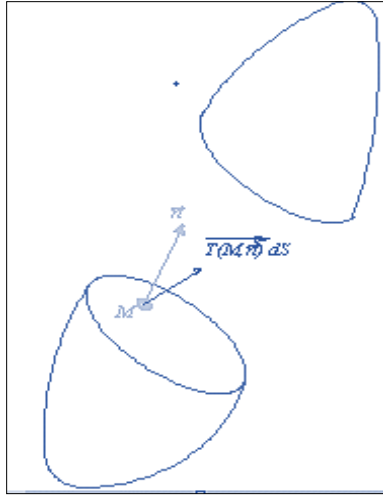


Figure 2- 3 : Modélisation des efforts de contact intérieur [G2]

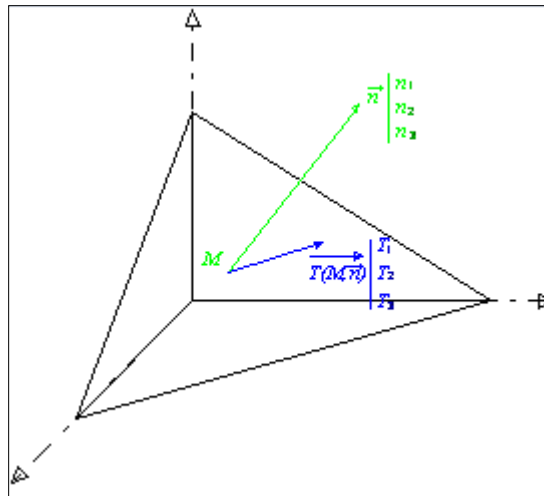


Figure 2- 4 : Représentation du vecteur contrainte [G2]

Le vecteur de contrainte ne suffit pas à lui seul pour caractériser l'état de contrainte en un point matériel. Sa dépendance vis-à-vis de la direction de la normale à la facette montre clairement qu'il est nécessaire d'envisager une autre représentation pour l'état de contrainte. Cette relation est introduite via la loi de Cauchy qui introduit localement un tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$, dans la configuration actuelle, comme opérateur linéaire (tenseur) transformant le vecteur $\vec{n}$ en un vecteur de traction $\vec{T}(M, \vec{n})$:

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \boldsymbol{\sigma} \vec{n} \quad (2.28)$$

Ce tenseur est appelé « *tenseur des contraintes* » ou encore tenseur de Cauchy et il est fonction uniquement du point d'étude.

Équilibre dynamique

Pour écrire les équations d'équilibre, on isole un domaine matériel et on lui applique le principe fondamental de la dynamique qui met en relation la masse d'un objet, et l'accélération qu'il reçoit si des forces lui sont appliquées.

Le principe fondamental nous donne alors deux égalités vectorielles :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \vec{V}(M, t / R_g) dm = \int_{\Omega} \vec{f}(M, t) dm + \int_{\partial\Omega} \vec{T}(P, \vec{n}) d\partial\Omega \quad (2.29)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \vec{OM} \wedge \vec{V}(M, t / R_g) dm = \int_{\Omega} \vec{OM} \wedge \vec{f}(M, t) dm + \int_{\partial\Omega} \vec{OM} \wedge \vec{T}(P, \vec{n}) d\partial\Omega \quad (2.30)$$

$$\text{où } dm = d(\rho V) \quad (2.31)$$

où V est le volume du domaine associé à Ω .

a) Pour la quantité de mouvement linéaire :

En utilisant le théorème de la divergence, il est possible de redéfinir Ω comme domaine d'intégration du tenseur des efforts intérieurs.

$$\int_{\partial\Omega} \vec{T}(P, \vec{n}) d\partial\Omega = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \vec{n} d\partial\Omega = \int_{\Omega} \vec{\text{div}} \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (2.32)$$

Et l'équation de résultante devient alors :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \vec{V}(M, t / R_g) dm = \int_{\Omega} \vec{\text{div}} \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \vec{f}(M, t) dm \quad (2.33)$$

En supposant que la loi de conservation de la masse est satisfaite, on peut en déduire la relation suivante :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt}(M, t / R_g) = \vec{\text{div}} \boldsymbol{\sigma} + \rho \vec{f}(M, t) \quad (2.34)$$

Cette équation fondamentale exprime la traduction locale du principe fondamental de la mécanique et montre bien les liens entre l'état de contrainte en un point et les sollicitations extérieures. En termes de composantes cartésiennes, l'équation de la conservation de la quantité de mouvement en description eulérienne s'écrit :

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i \quad (2.35)$$

$$\text{où } b_i = \rho_i f_i \quad (2.36)$$

Le côté gauche représente le changement de la quantité de mouvement. Étant donné que c'est le produit de l'accélération et de la densité, on peut aussi l'appeler le terme d'inertie ou de cinétique. Le premier terme du côté droit est la force interne nette résultant par unité de volume due à la divergence du champ de contraintes et le second représente les efforts de volume.

Ces équations sont définies dans la configuration actuelle et donc sont inconnues. Il faudra se transporter dans la configuration de référence connue (formulation lagrangienne) grâce aux tenseurs de Piola-Kirchhoff.

Selon l'approche lagrangienne, le principe fondamental de la mécanique en configuration actuelle sur la configuration non déformée s'écrit :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \vec{V}(M, t / R_g) \rho \det \mathbf{F} d\Omega_0 = \int_{\partial\Omega} \det \mathbf{F} \boldsymbol{\sigma} \bar{\otimes} \mathbf{F}^{-T} \bar{\otimes} n_0 d\partial\Omega_0 + \int_{\Omega} \vec{f}(M, t) \rho \det \mathbf{F} d\Omega_0 \quad (2.37)$$

où $\bar{\otimes}$ est un produit tensoriel contracté une fois. D'où on déduit qu'en description Lagrangienne, la forme locale devient :

$$\rho_0 \det \mathbf{F} \vec{\gamma}(M, t / R_g) = \vec{\text{div}}(\det \mathbf{F} \boldsymbol{\sigma} \bar{\otimes} \mathbf{F}^{-T}) + \rho_0 \det \mathbf{F} \vec{f}(M, t) \quad (2.38)$$

Soit après simplification :

$$\rho_0 \vec{\gamma} = \nabla_0 \cdot \mathbf{P} + \rho_0 \vec{f} \quad (2.39)$$

ou encore

$$\rho_0 \ddot{u}_i = \frac{\partial P_{ji}}{\partial X_j} + \rho_0 f_i \quad (2.40)$$

où $\mathbf{P} = \det \mathbf{F} \boldsymbol{\sigma} \bar{\otimes} \mathbf{F}^{-T}$ est le premier tenseur de Piola-Kirchhoff (PK1). Cette équation est similaire à celle de la description eulérienne, le tenseur de contraintes de Cauchy est remplacé par la contrainte nominale et la densité est remplacée par la densité initiale.

b) Pour la localisation de l'équation du moment cinétique

La loi locale de conservation du moment cinétique dans le cas de matériaux non polaires se traduit par la symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy.

Cette équation conduit à la relation simple suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad (2.41)$$

ou sous forme de composantes :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.42)$$

En d'autres mots, la conservation du moment cinétique requiert que le tenseur de contraintes de Cauchy soit symétrique. En description lagrangienne, on introduit des pseudo-contraintes définies par rapport à la configuration non déformée et liées au tenseur

des contraintes de Cauchy via des lois de transformation de tenseurs entre deux configurations différentes. Ainsi, on retrouve la loi de transformation entre le tenseur de contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ et la contrainte nominale PK1, $\mathbf{P}$ est donnée par :

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{P} \quad (2.43)$$

Pour retrouver la symétrie du tenseur des contraintes qui est défini par rapport à la configuration de référence, on introduit le tenseur de Piola-Kirchhoff 2, $\mathbf{S}$ (PK2) qui est symétrique et qui est définie par l'équation suivante :

$$[\mathbf{S}] = J [\mathbf{F}]^{-1} [\boldsymbol{\sigma}] [\mathbf{F}]^{-T} \quad (2.44)$$

2.3.4. Conservation de l'énergie (1ère loi de la thermodynamique)

La loi de la conservation de l'énergie est également appelée 1^{ière} loi de la thermodynamique. Elle exprime le fait que la variation de l'énergie totale (énergie interne et énergie cinétique) d'un domaine est égale à la somme de la puissance des efforts extérieurs développés sur le système et de la quantité de chaleur apportée au système par unité de temps :

$$\frac{dU}{dt} + \frac{dK}{dt} = P_{ext} + \dot{Q} = \frac{\delta W_{ext}}{\delta t} + \frac{\delta Q}{\delta t} \quad (2.45)$$

où la notation $\frac{\delta}{\delta t}$ est utilisée pour indiquer que les fonctions dérivées ne sont pas des fonctions d'état et qu'elles ne dérivent pas d'un potentiel ; U est l'énergie interne du système, Q est la chaleur entrant dans le système et W est le travail fait sur le système. Pour un milieu continu, cette équation peut se mettre sous la forme :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \vec{t} \cdot \vec{v} d\partial\Omega - \int_{\partial\Omega} \vec{q} \cdot \vec{n} d\partial\Omega + \int_{\Omega} r d\Omega \quad (2.46)$$

où D/Dt est la dérivée particulaire en formulation eulérienne. Sous forme locale, on a :

$$\rho \frac{De}{Dt} = \sigma_{ij} D_{ij} - q_{i,i} + r \quad (2.47)$$

où r est la densité volumique de production de chaleur.

On peut donc dire que la variation de l'énergie interne massique est due à la puissance massique dissipée par les efforts intérieurs et à un apport de chaleur volumique.

Et on obtient ainsi une équation locale de la conservation d'énergie écrite sous forme très pratique pour les applications (en configuration actuelle et de référence):

$$\begin{aligned}\rho \dot{e} &= \sigma_{ij} d_{ij} - q_{j,j} + r \\ \rho_0 \dot{e}_0 &= S_{IJ} \dot{E}_{IJ} - Q_{I,J} + r_0\end{aligned}\quad (2.48)$$

2.3.5. Inégalité de l'entropie (2^{ème} loi de la thermodynamique)

En physique des milieux continus, on admet pour des évolutions quelconques qu'il est possible de déterminer en chaque point et à chaque instant un champ scalaire positif, appelé température absolue, et noté T , et une fonction d'état du système additive, appelée entropie, notée s , et telle que l'on ait toujours l'inégalité :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} s \geq \int_{\Omega} \frac{r}{T} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{\vec{q}}{T} \cdot \vec{n} d\partial\Omega \quad (2.49)$$

Si on exprime l'entropie s par une entropie spécifique (ou massique), la 2^{ème} loi de la thermodynamique s'écrit pour un milieu continu :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho s d\Omega \geq \int_{\Omega} \frac{r}{T} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{\vec{q}}{T} \cdot \vec{n} d\partial\Omega \quad (2.50)$$

L'égalité n'est obtenue que dans le cas très particulier des transformations réversibles. Compte tenu de l'équation de continuité, l'inégalité locale de l'entropie s'écrit sous forme eulérienne comme suit :

$$\rho \frac{ds}{dt} + \text{div} \left(\frac{\vec{q}}{T} \right) - \frac{r}{T} \geq 0 \Rightarrow \rho \dot{s} \geq -\frac{q_{i,i}}{T} + \frac{T_{,i}}{T^2} q_i + \frac{r}{T} \quad (2.51)$$

Dans cette équation, r n'est pas dissipatif (et peut être éliminé via la loi de conservation de l'énergie), l'équation précédente peut alors s'écrire [G2] :

$$\sigma_{\equiv} \otimes \mathbf{D} + \rho \left(T \frac{ds}{dt} - \frac{de}{dt} \right) - \frac{1}{T} \vec{q} \cdot \overrightarrow{\text{grad } T} \geq 0 \quad (2.52)$$

Sous forme lagrangienne, l'équation 2.52 devient :

$$\mathbf{S}_{\equiv} \otimes \mathbf{E} + \rho_0 \left(T \frac{ds}{dt} - \frac{de_0}{dt} \right) - \frac{1}{T} \vec{q} \cdot \overrightarrow{\text{grad } T} \geq 0 \quad (2.53)$$

Maintenant, on peut exprimer cette équation en termes de « l'énergie spécifique libre de Helmholtz », via la transformation de Legendre :

$$\psi = e - Ts \quad (2.54)$$

où ψ est l'énergie libre spécifique de Helmholtz, e est l'énergie interne spécifique du système, T est la température en (K) et s est l'entropie spécifique. On obtient alors l'inégalité de Clausius-Duhem donnée par :

$$-\rho \left(\frac{D\psi}{Dt} + s \frac{DT}{Dt} \right) + \sigma_{ij} D_{ij} - \text{div} \vec{q} \geq 0 \quad (2.55)$$

ou encore sous forme intrinsèque :

$$\sigma_{\equiv} \otimes \mathbf{D} - \rho \left(\frac{d\psi}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right) - \text{div} \vec{q} \geq 0 \quad (2.56)$$

Le second principe permet ainsi d'exprimer l'écart entre le processus étudié et un processus réversible. Cette différence fait apparaître deux origines : l'une thermique par le terme $-\frac{1}{T} \vec{q} \cdot \overrightarrow{\text{grad } T}$ et l'autre mécanique par le terme $\sigma_{\equiv} \otimes \mathbf{D} - \rho \left(\frac{d\psi}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right)$ qui se présente sous la différence de deux quantités dont la seconde est définie comme étant la partie réversible de la puissance dissipée par la déformation. Elle vient toujours en déduction de la puissance de déformation. On doit donc noter que les potentiels thermodynamiques e et ψ représentent la partie réversible d'un processus physique. Si le

processus est irréversible, on doit donc spécifier un mécanisme dissipatif en fonction des variables d'état et de variables internes à spécifier.

2.4. Lois de comportement pour matériaux dissipatifs en grandes déformations

Dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles des milieux continus, nous nous intéressons au 2^e principe de la thermodynamique pour une formulation cohérente des lois de comportement couplées et à caractère fortement dissipatif. On prendra comme variables observables des grandeurs cinématiques. Alors pour décrire le comportement des matériaux dissipatifs, on doit enrichir la cinématique en ajoutant des mécanismes de déformation associés au processus dissipatif. Deux approches sont généralement utilisées : une décomposition additive des déformations en partie réversible et irréversible couramment utilisée en petites déformations et une décomposition multiplicative plus utilisée en grandes déformations.

Selon l'approche de la décomposition multiplicative appelée communément décomposition de Lee [G8], une décomposition multiplicative du gradient des déformations (basée sur l'utilisation d'une configuration relâchée imaginaire des contraintes C^t , voir figure 2-5) est introduite dans le but de séparer localement les déformations permanentes des déformations élastiques et de voir l'évolution de l'écoulement du matériau à travers le réseau cristallin via le mouvement de dislocation [S7]. Ainsi, on a :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \quad (2.57)$$

$$\text{où } \mathbf{F}^p = \mathbf{F}^{vp} \mathbf{F}^T \quad (2.58)$$

où $\mathbf{F}^p$ est la déformation inélastique (plastique) de la configuration initiale à la configuration intermédiaire et $\mathbf{F}^e$ est la déformation élastique de la configuration intermédiaire à la configuration actuelle. $\mathbf{F}^{vp}$ et $\mathbf{F}^T$ représentent respectivement la déformation viscoplastique et la déformation thermique.

On procède de la même façon avec le tenseur J de la déformation totale (aussi appelé Jacobien de la déformation) qui caractérise la déformation volumique qu'on décompose en une partie élastique et viscoplastique :

$$J = J^e J^{vp}, \quad \text{où } J^e = \det(F^e); J^{vp} = \det(F^{vp}) \quad (2.59)$$

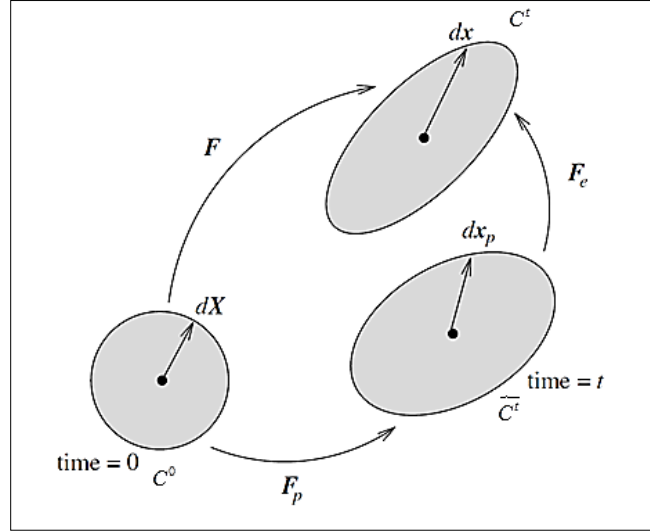


Figure 2- 5 : Décomposition multiplicative du tenseur gradient de déformation [B3]

Pour décrire le comportement du matériau thermo-élasto-viscoplastique, on utilise la même approche que Voyiadjis et al. [V3]. On suppose l'existence d'une densité d'énergie libre de Helmholtz, fonction du tenseur de déformation, du tenseur gradient de déformation, de la mesure de la déformation volumétrique, de la température et d'un certain nombre de variables internes, qui s'écrit sous la forme fonctionnelle suivante :

$$\psi = \psi(e_{ij}^E, F_{ij}, J, T, N_K) \quad (2.60)$$

où le vecteur des paramètres internes est défini par N_k et on a supposé que les variables d'état internes N_k ($k=1, \dots, n_{int}$) représentent soit des scalaires et des tenseurs pour compenser l'effet de certains mécanismes comme l'écrouissage/durcissement ou recristallisation, soit des déformations viscoplastiques, soit des couplages thermodynamiques, etc. : $N_k = \tilde{N}_k(\Xi_n)$ où Ξ_n sont les variables d'écrouissage viscoplastiques et de recristallisation.

Pour les lois de comportement considérées, on prendra comme variables internes macro, le vecteur suivant : $\Xi_n = \tilde{\Xi}_n(r, \alpha_{ij}, h)$ où les variables r et α permettent de prendre en considération l'écrouissage viscoplastique isotrope et cinématique respectivement, qui représentent les interactions des dislocations. La variable h permet de traduire à l'échelle macroscopique les évolutions microscopiques sur la contrainte d'écoulement du matériau. Le modèle constitutif proposé est formulé en respectant les principes de la thermodynamique, c'est-à-dire en respectant les principes fondamentaux de la mécanique soient : la conservation de la masse, la conservation de la quantité de mouvement, la conservation du moment cinétique, la conservation de l'énergie (1^{ière} loi de la thermodynamique) et la loi de l'entropie (2^{ième} loi de la thermodynamique) exprimée sous forme de l'inégalité de Clausius-Duhem.

- Principe d'objectivité

La méthode explicite utilisée dans ce travail (ex : VUMAT) impose une résolution incrémentale. Ainsi, pour passer d'une configuration à l'autre nous devons connaître l'incrément de rotation nécessaire pour caractériser la nouvelle configuration. Le schéma de résolution doit alors respecter le principe d'objectivité ou d'indifférence matérielle, c'est-à-dire que la grandeur d'une variable calculée dans le repère corotationnel (le repère local tourné) est indépendante de la rotation de corps rigide [M9].

La plupart des lois de comportement non linéaires comme c'est le cas de Johnson-Cook, utilisent à la base une approche incrémentale, c'est-à-dire que pour la mise à jour d'une variable quelconque, une ancienne valeur de cette variable tournée est utilisée dans la nouvelle configuration, à laquelle, est additionné un incrément de cette grandeur qui est calculé à partir d'une dérivée temporelle, tout en respectant la configuration de travail (matérielle ou eulérienne) [M9].

La loi de comportement doit ainsi respecter le principe d'objectivité, soit indépendante du référentiel d'observation et le tenseur des contraintes et toutes les variables tensorielles internes doivent respecter ce principe (les dérivées de la loi de comportement

dans un repère corotationnel doivent être réduites aux dérivées temporelles pour que le comportement du matériau ne soit pas affecté par un mouvement de corps rigide) [G9].

Il y a plusieurs dérivées objectives développées dans la littérature et parmi les plus connues sont celles de Truesdell, Jaumann et Green-Nagdi.

Afin de suivre la rotation du milieu matériel, les dérivées temporelles doivent être effectuées dans un repère local tourné (corotationnel). Pour ceux qui développent des lois de comportement écrites d'une façon incrémentale dans la configuration spatiale C^t , le taux de contrainte de Jaumann correspond à un taux déjà tourné dans la nouvelle configuration [S10] (équation 61).

$$\dot{\bar{\sigma}}_J = \dot{\bar{\sigma}} - \bar{\Omega} \cdot \bar{\sigma} + \bar{\sigma} \cdot \bar{\Omega} \quad (2.61)$$

où $\bar{\Omega}$ est la partie antisymétrique du tenseur gradient de vitesse.

Le taux de contraintes calculés à l'équation 2.61 peut être utilisé dans les lois de comportement développées de manière incrémentale dans la configuration actuelle C^t , le taux de contraintes est indépendant de la rotation de corps rigide et la loi de comportement est invariante par rapport au changement du repère d'observation [S11].

Le lecteur peut se rapporter aux travaux de Sidoroff [S11] et M.Matei [M9] pour plus d'informations sur les dérivées objectives de Truesdell, Jaumann et Green-Nagdi.

2.4.1. Relation cinématique

L'identification et la mise en œuvre d'une loi de comportement, dépendent de la configuration de référence choisie. Pour les matériaux isotropes, il est possible et souvent plus simple de formuler les équations constitutives dans la configuration actuelle en utilisant le tenseur de Cauchy-Green gauche élastique [B3] :

$$b_e = F_e F_e^T = F F_p^{-1} F_p^{-T} F^T = F C_p^{-1} F^T \quad (2.62)$$

2.4.2. Comportement thermo-élasto-viscoplastique et Énergie libre de Helmholtz

Tel qu'énoncé à l'équation 2.60, on suppose l'existence d'une densité d'énergie libre de Helmholtz. En grandes déformation, les variables dépendantes sont fonction des variables observables (comme la température) dont les valeurs sont soit mesurables directement soit accessibles au cours des essais, du tenseur Eulérien de déformation élastique totale ($\mathbf{e}^E$), du tenseur du gradient de déformation ($\mathbf{F}$), de la mesure de la déformation volumétrique ($J=\det(\mathbf{F})$) et de nint variables internes d'états phénoménologiques ($N_k, k=1, \dots, nint; nint \geq 1$) [A8].

Dans cette thèse, nous ne tiendrons pas compte des variables d'endommagement, pour décrire le modèle de comportement, soit :

$$\psi = \psi(e_{ij}^E, F_{ij}, J, T, N_K) \quad (2.63)$$

où le vecteur des paramètres internes est défini par $N_K = \{r, \alpha_{ij}, h\}$. Les variables internes reliées à la plasticité sont : α_{ij} représentant l'écrouissage cinématique (mouvement de la surface de chargement) et r associé à la déformation plastique équivalente reliée à l'écrouissage isotrope (grandeur de la surface de chargement). La variable interne reliée à la microstructure est h , liant l'écoulement du matériau au mécanisme de recristallisation dynamique (en rapport avec la loi de Johnson-Cook modifié qui sera utilisée).

Dans le cas des métaux et autres matériaux soumis à un taux de déformation très élevé, les déformations élastiques sont petites et on peut simplifier l'énergie libre de Helmholtz comme suit :

$$\psi = \tilde{\psi}(e_{ij}^E, J, T, \mathbb{N}_k) \quad (2.64)$$

Par ailleurs comme les déformations élastiques sont très petites lors de grands chargements, on peut supposer que le gradient de déformation de la partie élastique est unitaire, c'est-à-dire que $J^e=1$ et en appliquant l'hypothèse d'incompressibilité ($J^p=1$), qui est une bonne hypothèse pour les métaux, on réécrit l'énergie libre spécifique de Helmholtz ψ par :

$$\psi = \tilde{\psi}(e_{ij}^E, T, \mathbb{N}_k) \quad (2.65)$$

Le tableau 2-1 présente un résumé des variables de modélisation.

Tableau 2- 1 : Résumé des variables de modélisation

Variables d'état Observables		Variables duales	Theorie associée
ε : deformation		σ : contraintes de Cauchy	ThermoElasticité
T: temperature		S : entropie	
	ε^p : plastic strain	σ : contraintes de Cauchy	Plasticité
	r : écrouissage isotrope	R, R0 : incrément d'écrouissage pastique et seuil d'initiation de l'écrouissage	Ecrouissage isotrope en plasticité,
	α : écrouissage cinématique	X	Ecrouissage cinématique en plasticité
	h : variable microstructurale	H	Microstructure

2.4.3. Inégalité de Clausius-Duhem

Si on considère maintenant, l'inégalité de Clausius-Duhem :

$$-\rho \left(\frac{D\psi}{Dt} + s \frac{DT}{Dt} \right) + \sigma_{ij} D_{ij} - \text{div} \vec{q} \geq 0 \quad (2.66)$$

Et qu'on y introduit la dérivée matérielle de l'énergie libre de Helmholtz

$\psi = \psi(\varepsilon_{ij}^E, T, N_K)$ donnée par :

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^E} \dot{\varepsilon}_{ij}^E + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_{ij}} \dot{\alpha}_{ij} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial \psi}{\partial h} \dot{h} \quad (2.67)$$

En supposant un processus thermomécanique et en considérant les relations cinématiques adoptées, l'inégalité de Clausius Duhem devient :

$$\left(\sigma_{ij} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^E} \right) \dot{\varepsilon}_{ij}^E - \rho \left(s + \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) \dot{T} + \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^P - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_{ij}} \dot{\alpha}_{ij} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial r} \dot{r} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial h} \dot{h} - \frac{q_i}{T} \nabla T \geq 0 \quad (2.68)$$

Or, cette inégalité (équation 2.68) doit être valide pour tout processus thermodynamiquement admissible qu'il soit réversible ou dissipatif. Dans le cas réversible, l'équation 2.68 devient une égalité et on doit alors considérer la loi de comportement élastique suivante pour les contraintes de Cauchy :

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^E} \quad (2.69)$$

$$s = - \frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (2.70)$$

2.4.4. Inégalité réduite de dissipation

En introduisant les définitions suivantes pour les efforts thermodynamiques conjugués aux variables internes :

$$X_{ij} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_{ij}} \quad (2.71)$$

$$R = \rho \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (2.72)$$

$$H_{ij} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial h_{ij}} \quad (2.73)$$

L'inégalité de Clausius –Duhem (équation 2.68) devient :

$$\left(\sigma_{ij} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^E} \right) \dot{\varepsilon}_{ij}^E - \rho \left(s + \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) \dot{T} + \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^P - X_{ij} \dot{\alpha}_{ij} - R \dot{r} - H_{ij} \dot{h}_{ij} - \frac{q_i}{T} \nabla T \geq 0 \quad (2.74)$$

En tenant compte de la loi de comportement (équation 2.69), on ne conserve maintenant que les termes dissipatifs et l'inégalité réduite de dissipation devient alors :

$$\Pi = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p - X_{ij} \dot{\alpha}_{ij} - R\dot{r} - H_{ij} \dot{h}_{ij} - \frac{q_i}{T} \nabla T \geq 0 \quad (2.75)$$

où Π désigne la dissipation et doit être positive. Les lois d'évolutions des variables internes associées aux déformations plastiques sont obtenues en appliquant le principe de dissipation maximale sous la condition que le critère de plasticité soit respecté.

2.4.5. Loi d'évolution des variables internes

L'état thermodynamique d'un corps est décrit à partir des variables observables indépendantes et d'un certain nombre de variables internes. Les variables d'état permettent de décrire l'évolution du milieu dans un processus réversible où les variables internes sont maintenues constantes. Les variables internes dans ce cas servent donc à décrire la dissipation interne du matériau.

- Critères :

L'évolution des paramètres internes exige, l'introduction d'un critère d'écoulement $f(\sigma, X, R)$ qui définit un domaine élastique convexe comme suit dans l'espace des contraintes :

$$E = \{(\sigma, X, R) \in S \times R^m : f(\sigma, X, R) \leq 0\} \quad (2.76)$$

où S est l'espace vectoriel du tenseur des contraintes symétriques d'ordre 2 et (X, R) est un vecteur adéquat de m (≥ 1) variables internes (de type contrainte) caractérisant l'écrouissage du matériau.

En faisant l'hypothèse de l'isotropie, le domaine de plasticité est délimité par le critère de Von Mises correspondant à nos futures observations expérimentales, le critère s'écrit :

$$f = J_2(\boldsymbol{\sigma} - X) - R - \sigma_y \quad (2.77)$$

Dans une approche couplée à la microstructure, l'écoulement du matériau est décrit en fonction de variables internes basées sur l'évolution de la microstructure.

$$\sigma_y = g\left(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, T, H\right) \quad (2.78)$$

où H est fonction de la recristallisation dynamique.

La contrainte d'écoulement ici correspond à celle de Johnson-Cook ou de Johnson-Cook modifié :

$$\sigma_y = \begin{cases} \left(A + B\varepsilon^n \right) \left(1 + C \ln \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \right) \left(1 - \left(\frac{T - T_{room}}{T_m - T_{room}} \right)^m \right) & \text{pour JC standard} \\ \left(A + B\varepsilon^n \right) \left(1 + C \ln \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \right) \left(1 - \left(\frac{T - T_{room}}{T_m - T_{room}} \right)^m \right) (H(T)) & \text{pour JC modifié} \end{cases} \quad (2.79)$$

- Lois d'évolution des paramètres internes et Principe de dissipation maximale

Les paramètres internes sont définis via le potentiel de dissipation (équation 2.75) et leur évolution pour des matériaux standards généralisés est régie par le principe de dissipation maximale qui peut s'énoncer comme suit : « l'évolution du champ de contraintes, des déformations pour un processus thermodynamiquement admissible est telle que la dissipation est maximale tout en respectant les critères de plasticité ». Mathématiquement ceci peut s'énoncer comme un problème d'optimisation avec contraintes que l'on peut transformer en un problème d'optimisation sans contraintes en introduisant les multiplicateurs de Lagrange $\dot{\lambda}^{vp}$ à la viscoplasticité. La fonction de dissipation Π est soumise à la contrainte $f=0$ de sorte que la fonctionnelle augmentée est définie de la manière suivante :

$$\Omega = \Pi - \dot{\lambda}^{vp} f \quad (2.80)$$

$$\Omega = \sigma_{ij} \left(\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} \right) - X_{ij} \dot{\alpha}_{ij} - R \dot{r} - H_{ij} \dot{h}_{ij} - \dot{\lambda}^{vp} f \quad (2.81)$$

Le principe de dissipation maximale stipule que l'état actuel des forces thermodynamiques, associée à la plasticité, est celui qui maximise la fonction de

dissipation pour tous les états admissibles. Ainsi les conditions de stationnarité de la fonctionnelle Ω , peuvent s'écrire comme suit :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{ij}} = 0 \quad (2.82)$$

En substituant l'équation 2.80 dans celle 2.82 tout en respectant l'équation 2.75, l'évolution ou taux de la déformation inélastique (loi d'écoulement plastique) peut s'exprimer ainsi :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^I = \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \dot{\lambda}^{vp} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.83)$$

Afin de pouvoir traiter des cas où les lois d'écoulement sont non associées pour les variables d'écrouissage en plasticité, on peut introduire un potentiel plastique F différent de la surface de charge f . Ceci est souvent requis pour que les lois d'écrouissage représentent bien les mécanismes réels de déformation. Dans ce cas, les lois d'évolution des variables d'état internes s'obtiennent comme suit :

$$\dot{\alpha}_{ij} = -\dot{\lambda}^{vp} \frac{\partial F}{\partial X_{ij}} \quad (2.84)$$

$$\dot{r} = -\dot{\lambda}^{vp} \frac{\partial F}{\partial R} \quad (2.85)$$

$$\dot{h}_{ij} = -\dot{\lambda}^{vp} \frac{\partial F}{\partial H_{ij}} \quad (2.86)$$

On peut déterminer $\dot{\lambda}^{vp} \geq 0$ connu sous le nom de paramètre de consistance viscoplastique doit obéir aux conditions de chargement/déchargement de Kuhn-Tucker :

$$f \leq 0 \quad \text{et} \quad \dot{f} \begin{cases} < 0 \Rightarrow \dot{\lambda}^{vp} = 0 \\ = 0 \Rightarrow \dot{\lambda}^{vp} = 0 \\ = 0 \Rightarrow \dot{\lambda}^{vp} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{déchargement élastique} \\ \text{chargement neutre} \\ \text{chargement plastique} \end{cases} \quad (2.87)$$

2.5. Conditions aux limites de type mécanique pour un problème de mise en forme

Les conditions limites sont celles imposées par les outils sur le matériau lors de la mise en forme, elles se traduisent par des conditions de vitesse imposée, de pression, de contrainte ou encore de contact.

En notant par $\partial\Omega$ le bord du domaine Ω , on le décompose en une union de quatre parties disjointes, sur lesquelles on impose les conditions aux limites. On pose :

$$\partial\Omega = \Gamma_F \cup \Gamma_T \cup \Gamma_v \cup \Gamma_c \quad (2.88)$$

Avec :

- Γ_F est la surface libre sur laquelle la contrainte σ_n est nulle ($\sigma.n = 0$). On considère que la pression atmosphérique (P_{ext}) est nulle.
- Γ_T est la surface à contrainte imposée, $\sigma.n = t_0$
- Γ_v est la partie de $\partial\Omega$ où la vitesse est imposée. Ce cas de figure peut modéliser par exemple un contact bilatéral collant entre un corps rigide (vitesse connue) et un corps déformable.
- Γ_c est la surface de contact, sur laquelle on définit des conditions de contact et de frottement.

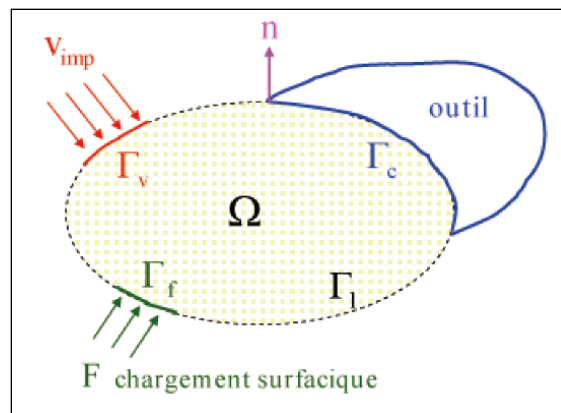


Figure 2- 6 : Modélisation des conditions aux limites du problème mécanique [P1]

2.6. Modélisation du problème thermique

Dans le cas d'opérations de mise en forme à chaud, il faudra connaître l'évolution de la température du lopin au cours du formage et les interactions thermomécaniques. Nous décrivons le problème thermique inspiré des travaux de Pélissou [P1] et Aliaga [A4] pour la modélisation du forgeage à chaud.

Soit le domaine Ω de frontière suffisamment régulière constituée de quatre parties ouvertes disjointes de sorte que $\partial\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$.

Partant du premier principe de la thermodynamique et en posant certaines hypothèses, l'équation de la chaleur pourra être établie :

- a- Le matériau est à liaisons parfaites et on néglige toute transformation chimique ou physique de la matière : l'énergie interne est alors supposée dépendre de la température absolue T ($e = e(T)$) par l'intermédiaire de la capacité calorifique spécifique C_v du matériau :

$$\dot{e} = C_v \frac{dT}{dt} \quad (2.89)$$

$$\rho \dot{e} = \rho C_v \frac{dT}{dt} \quad (2.90)$$

- b- Le rayonnement est négligé, seules la conduction et la convection sont retenues comme sources d'échange de chaleur.

Selon l'équation de conservation de l'énergie (1^{er} principe de la thermodynamique) :

$$\rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \text{div} \vec{q} + r = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \text{div} \vec{q} + \pi \quad (2.91)$$

où π est la densité volumique de production de chaleur, $\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ est la puissance provenant de la mécanique dissipée sous forme de chaleur, $\text{div} \vec{q}$ est la quantité de chaleur dissipée par conduction.

Étant donné que :

$$e = \psi + Ts \quad (2.92)$$

On peut écrire :

$$\dot{e} = \dot{\psi} + \dot{T} s + \dot{s} T \Rightarrow \rho \dot{e} = \rho(\dot{\psi} + \dot{T} s + \dot{s} T) = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \text{div} \vec{q} + \pi \quad (2.93)$$

Si on suppose la loi de Fourier pour la conduction $\vec{q} = -k \cdot \text{grad} T$ et comme

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^E} \dot{\varepsilon}_{ij}^E + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_{ij}} \dot{\alpha}_{ij} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial \psi}{\partial h} \dot{h}, \quad (2.94)$$

en remplaçant $\dot{\psi}$ par son expression et comme $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp}$ en petites déformations, on obtient :

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \mathbf{X} : \dot{\mathbf{a}} + R \dot{r} + H \dot{h} + \rho T \dot{s} + \rho \dot{T} s = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + k \nabla T + \pi \quad (2.95)$$

La résolution de l'équation de chaleur permet de connaître à chaque instant la température en tout point du matériau. Cela suppose cependant que la répartition initiale de température ainsi que les conditions aux limites sur les frontières du domaine étudié soient définies. À partir de la relation 2.70 on a :

$$\dot{s} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial T} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial T} : \dot{\mathbf{a}} + \frac{\partial R}{\partial T} \dot{r} + \frac{\partial H}{\partial T} \dot{h} \right) + \frac{\partial s}{\partial T} \dot{T} \quad (2.96)$$

Ainsi, l'équation généralisée de la chaleur dans un solide thermo-élasto-viscoplastique est donnée :

$$\begin{aligned} \rho C_v \dot{T} = \text{div}(k \text{grad} T) + \pi + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \mathbf{X} \dot{\mathbf{a}} - R \dot{r} - H \dot{h} - \\ T \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial T} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial T} : \dot{\mathbf{a}} + \frac{\partial R}{\partial T} \dot{r} + \frac{\partial H}{\partial T} \dot{h} \right) \end{aligned} \quad (2.97)$$

On pose :

$$R_{pl} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \mathbf{X} : \dot{\mathbf{a}} - R \dot{r} - H \dot{h} + T \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial T} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial T} : \dot{\mathbf{a}} + \frac{\partial R}{\partial T} \dot{r} + \frac{\partial H}{\partial T} \dot{h} \right) \quad (2.98)$$

R_{pl} est la source interne de chaleur provenant de la contribution mécanique (on assume généralement 90%) où le terme $\sigma : \dot{\varepsilon}^P$ n'est plus une équation de champ et peut être résolue localement en même temps que l'intégration de la loi de comportement [L19].

L'équation thermique couplée avec mécanique devient alors:

$$\rho C_v \dot{T} = \text{div}(k \text{grad} T) + \pi + R_{pl} \quad (2.99)$$

La résolution de l'équation de chaleur permet de connaître à chaque instant la température en tout point du matériau. Cela suppose cependant que la répartition initiale de température ainsi que les conditions aux limites sur les frontières du domaine étudié soient définies.

Les conditions aux limites pour les équations régissant le problème thermique instationnaire avec la température T pour seule inconnue sont résumées ci-dessous [P1] :

$$\left\{ \begin{array}{l} T(x, 0) = T_0 \quad \forall x \in \Omega \quad \text{condition initiale} \\ T = T_{imposée} \quad \text{sur } \Gamma_1 \times]0, t[\quad \text{condition de Dirichlet} \\ -k \overline{\nabla T} \cdot \vec{n} = \phi_{imposée} \quad \text{sur } \Gamma_2 \times]0, t[\quad \text{condition de flux imposé} \\ -k \overline{\nabla T} \cdot \vec{n} = h_{ed} (T - T_{ext}) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times]0, t[\quad \text{condition de convection} \\ \left\{ \begin{array}{l} -k \overline{\nabla T} \cdot \vec{n} = h (T - T_{ext}) \quad \text{sur } \Gamma_4 \times]0, t[\\ h = h_{ev} + h_r \\ h_r = \varepsilon_r \sigma_r (T + T_{ext}) (T^2 + T_{ext}^2) \end{array} \right. \quad \text{condition de conv / rayonnement} \end{array} \right. \quad (2.100)$$

2.7. Discrétisation par la MÉF du modèle couplé

2.7.1. Principe du travail virtuel

Afin d'utiliser la méthode des éléments finis, il faut représenter le problème en formulation faible aussi appelée principe des travaux virtuels. A cet effet, posons $\delta \mathbf{v}$ comme vitesse virtuelle à partir de la position actuelle du corps [B3]. Le travail virtuel δW par unité de volume est donné par :

$$\delta W = \int_{\Omega} \left(\text{div} \sigma_{ij} + \rho f_i \right) \cdot \delta v_i d\Omega = \int_{\Omega} \delta v_i \rho \frac{Dv_i}{Dt} d\Omega \quad (2.101)$$

où

$$\text{div}(\sigma_{ij} \delta v_i) = (\text{div} \sigma_{ij}) \cdot \delta v_i + \sigma_{ij} : \nabla \delta v_i \quad (2.102)$$

En utilisant cette équation avec le théorème de Gauss, l'équation 2.101 peut être réécrite comme suit :

$$\int_{\partial\Omega} n_j \sigma_{ij} \cdot \delta v_i da + \int_{\Omega} \sigma_{ij} : \nabla \delta v_i d\Omega + \int_{\Omega} \rho f_i \cdot \delta v_i d\Omega = \int_{\Omega} \delta v_i \rho \frac{Dv_i}{Dt} d\Omega \quad (2.103)$$

En décomposant le gradient de la vitesse virtuelle $\delta \mathbf{v}$ en partie symétrique $\delta \mathbf{D}$ et antisymétrique $\delta \mathbf{W}$ et en exploitant le fait que le tenseur des contraintes est symétrique, on peut écrire :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} : \nabla \delta v_i d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} : (\delta D_{ij} + \delta W_{ij}) d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} : \delta D_{ij} d\Omega \quad (2.104)$$

De plus, en utilisant de l'équation des conditions aux limites naturelles (relation de Cauchy) donnée par $\sigma_{ij} n_j = t_i$, d'où l'équation des travaux virtuel 2.101 peut s'écrire en termes du taux de déformation virtuel symétrique devient :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} : \delta D_{ij} d\Omega + \int_{\partial\Omega} t_i \cdot \delta v_i da + \int_{\Omega} \rho f_i \cdot \delta v_i d\Omega = \int_{\Omega} \delta v_i \rho \frac{Dv_i}{Dt} d\Omega \quad (2.105)$$

Le problème variationnel suivant est le problème à résoudre :

$$\int_{\Omega} \rho \frac{Dv_i}{Dt} \delta v_i d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij} : \delta D_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} \rho f_i . \delta v_i d\Omega - \int_{\partial\Omega} t_i . \delta v_i d\partial\Omega = 0 \quad (2.106)$$

Pour utiliser une formulation lagrangienne totale, il faut réécrire l'équation précédente sur la configuration initiale en notant que:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} : \delta D_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} J \sigma_{ij} : \left(F_{ij}^{-T} \delta \dot{E}_{ij} F_{ij}^{-1} \right) d\Omega = \int_{\Omega} tr \left(F_{ij}^{-1} J \sigma_{ij} F_{ij}^{-T} \delta \dot{E}_{ij} \right) d\Omega = \int_{\Omega_0} S_{ij} : \delta \dot{E}_{ij} d\Omega_0 \quad (2.107)$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega_0} \rho_0 \frac{Dv_{0i}}{Dt} \delta v_i d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} S_{ij} : \delta \dot{E}_{ij} d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \rho_0 F_i . \delta v_i d\Omega_0 - \int_{\partial\Omega_0} T_i . \delta v_i d\partial\Omega_0 = 0 \quad (2.108)$$

Ces équations définissent l'équilibre du corps déformable et deviendront la base pour l'approximation et la discrétisation en éléments finis.

Pour la thermique, la forme faible de l'équation de chaleur est donnée par :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho C_v \dot{T} \delta T d\Omega - \int_{\Omega} R_{pl} \delta T d\Omega - \int_{\Omega} k \nabla T \delta T d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \pi \delta T d\Omega - \int_{A_q} q_{conv} \delta T d\partial\Omega = 0 \end{aligned} \quad (2.109)$$

δT désigne une température virtuelle vérifiant les conditions limites thermiques sur la surface où le flux est imposé.

2.7.2. Aspect numérique : discrétisation spatio-temporelle

On présente la discrétisation spatio-temporelle d'un problème thermo-élasto-viscoplastique inspirée des travaux de Lestriez [L3].

La discrétisation spatiale utilise la méthode des éléments finis basée sur une formulation variationnelle en déplacement et en température pour la résolution des équations d'équilibre. Quant à la discrétisation temporelle, elle est basée sur des schémas aux différences finies pour intégrer les équations du comportement.

- Problème thermique (ÉF avec une formulation en température)

Pour obtenir une discrétisation spatiale du domaine, il faut décomposer le domaine en sous-domaines. L'approximation nodale du champ de température pour chaque sous domaine est définie par :

$$\Omega = \sum_{\text{éléments}} \Omega_T^e, \quad T_j = \sum_k N_T^k T_j^k \quad (2.110)$$

N_T^k , représente les fonctions d'interpolation des températures. k est le nœud associé et j l'élément associé.

On introduit l'approximation obtenue dans la forme faible sur un élément:

$$I_j^T = \left[\left[C_j^{ki} \right] \dot{T}_j^i - \left[G_{j|ext}^k \right] + \left[G_{j|int}^k \right] \right] \bar{T}_j^k = 0 \quad (2.111)$$

La matrice de capacitance et les vecteurs forces extérieures et intérieures sont définis comme suit :

$$\left[C_j^{ki} \right] = \int_V \left[N_T^k \right]^T \rho_0 C_v \left[N_T^i \right] dV \quad (2.112)$$

$$\left[G_{j|ext}^k \right] = \int_{\Omega} \left[N_T^k \right]^T \pi d\Omega \quad (2.113)$$

$$\begin{aligned} \left[G_{j|int}^k \right] = & - \int_{\Omega} \left[N_T^k \right]^T R_{pl} d\Omega + \int_{\partial\Omega_q} \left[N_T^k \right]^T \bar{q} d\partial\Omega \\ & - \int_{\partial\Omega_r} \left[N_T^k \right]^T q_f d\partial\Omega + \int_{\Omega} \left[B_T^k \right]^T (kT) \left[B_T^k \right] d\Omega, \end{aligned} \quad (2.114)$$

$$B_T^k = \frac{\partial N_T^k}{\partial x} : \text{matrice opérateur - gradient temperature}$$

En effectuant l'assemblage de toutes les contributions élémentaires, on obtient l'équation d'équilibre thermique globale :

$$I^T = \left[\sum_j \left(\left[C_j^{ki} \right] \dot{T}_j^i - \left[G_{j|ext}^k \right] + \left[G_{j|int}^k \right] \right) \right] \bar{T}^k = 0 \quad \text{système global} \quad (2.115)$$

- **Problème mécanique (ÉF avec une formulation en déplacements)**

Comme pour le problème thermique, on décompose le domaine en sous-domaines. Ce qui permet d'obtenir une approximation du champs de déplacement u_j pour chaque sous-domaine.

$$\Omega = \sum_{\text{éléments}} \Omega^j, \quad u_j = \sum_k N^k u_j^k \quad (2.116)$$

N^k , représente les fonctions d'interpolation des déplacement. k est le nœud associé et j l'élément associé.

Après discrétisation de la forme faible et après y avoir introduit l'approximation locale par EF, la forme faible discrétisée peut s'écrire sur chaque élément comme suit :

$$I_j^M = \left[\left[M_j^{ki} \right] \ddot{u}_j^i - \left[F_{j|ext}^k \right] + \left[F_{j|int}^k \right] \right] \delta u_j^k = 0 \quad (2.117)$$

La matrice masse et les vecteurs forces extérieures et intérieures sont définis comme suit :

$$\left[M_j^{ki} \right] = \int_{\Omega^j} \rho_0 \left[N^k \right]^T \left[N^i \right] d\Omega \quad (2.118)$$

$$\left[F_{j|ext}^k \right] = \int_{\Omega^j} \left[N^k \right]^T f_d d\Omega + \int_{\partial\Omega_F^j} \left[N^k \right]^T t d\partial\Omega + \int_{\partial\Omega_c^j} \left[N^k \right]^T t_t d\partial\Omega \quad (2.119)$$

$$\left[F_{j|int}^k \right] = \int_{\Omega^j} \left[B^k \right]^T \{ \sigma \} d\Omega, \quad B^k = \frac{\partial N^k}{\partial x} \quad (2.120)$$

B^k est la matrice de déformation-déplacement ($\delta D = B \delta v$)

En procédant à l'assemblage de toutes les contributions élémentaires, on obtient les équations d'équilibre mécanique globale en statique et en dynamique.

$$I^M = \left[\sum_j \left(\left[M_j^{ki} \right] \ddot{u}_j^i - \left[F_{j|ext}^k \right] + \left[F_{j|int}^k \right] \right) \right] \delta u_j^k = 0 \quad \text{système global} \quad (2.121)$$

$$\left[F_{int}^k \right] - \left[F_{ext}^k \right] = \left[R^k(u^i) \right] = 0 \quad \text{équilibre statique} \quad (2.122)$$

$$\left[M^{ki} \right] \ddot{u}^i = \left[R^k(u^i) \right] = 0 \quad \text{équilibre dynamique} \quad (2.123)$$

2.7.3. Méthode de résolution

Il existe différentes méthodes de résolution dont la méthode statique implicite couplée thermomécaniquement et la méthode dynamique explicite couplée.

- Méthode statique implicite du couplage thermomécanique [L3]

Elle consiste à utiliser la méthode de Newton-Raphson sur un élément de volume du domaine Ω . Dans Abaqus Standard, la résolution de ce système est faite avec un algorithme incrémental implicite de type Newton.

La forme faible du système thermomécanique dans le domaine de référence s'écrit :

$$\begin{cases} R^M = - \int_{\Omega_0} [B]^T \sigma J d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} [N]^T f J d\Omega_0 + \int_{\partial\Omega_0} [N]^T t J_s d\partial\Omega_0 + \int_{\partial\Omega_0} [N]^T t_c J_s d\partial\Omega_0 = 0 \\ R^T = \left[\int_{\Omega_0} [N]^T \rho C_v [N] J d\Omega_0 \right] \dot{T} - \int_{\Omega_0} [N]^T R_{pl} J d\Omega_0 + \int_{\partial\Omega_0} [N]^T \bar{q} J_s d\partial\Omega_0 + \\ \int_{\partial\Omega_0} [N]^T q_f J_s d\partial\Omega_0 + \int_{\Omega_0} [B]^T (kT) [B] J d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} [N]^T J \pi d\Omega_0 = 0 \end{cases} \quad (2.124)$$

où J et Js sont les déterminants des matrices jacobienne volumique et surfacique, de passage d'un élément réel à un élément de référence.

Le système (équation 2.124) montre les différentes sources de non-linéarité du problème :

- matérielles ($\sigma, R_{pl}, t_c, \dots$),
- géométriques, les forces appliquées (f, t_s, t_c) et les jacobiens (J et Js) ne sont pas constants en grandes déformations.

En supposant que la variation de géométrie du domaine est faible au cours d'un incrément de chargement, on peut négliger les variations des jacobiens. On peut alors déterminer les matrices tangentes élémentaires. Après linéarisation au tour d'une solution donnée, le système (2.124) devient :

$$\begin{pmatrix} K_{MM} & K_{MT} \\ K_{TM} & K_{TT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^M \\ R^T \end{pmatrix} \quad (2.125)$$

où Δu et ΔT représentent les incréments de déplacement et de température. Les termes de la matrice tangente (équation 2.125) traduisent le couplage thermomécanique.

K_{MM} est la sous-matrice tangente relative au problème purement mécanique,

K_{MT} et K_{TM} représentent les sous-matrices tangentes du couplage thermomécanique

et K_{TT} est la sous-matrice tangente purement thermique.

$$\begin{aligned} [K_{MM}] &= \left[\frac{\partial [R^M]}{\partial u} \right] = \int_{\Omega_0} [B]^T \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} [B] J d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} [N]^T \frac{\partial f}{\partial u} J d\Omega_0 - \\ &\int_{\partial\Omega_0} [N]^T \frac{\partial t}{\partial u} J_s d\partial\Omega_0 - \int_{\partial\Omega_0} [N]^T \frac{\partial t_c}{\partial u} J_s d\partial\Omega_0 \end{aligned} \quad (2.126)$$

$$[K_{MT}] = \left[\frac{\partial [R^M]}{\partial T} \right] = \int_{\Omega_0} [B]^T \left[\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right] J d\Omega_0 \quad (2.127)$$

$$[K_{TM}] = \left[\frac{\partial [R^T]}{\partial u} \right] = \int_{\Omega_0} [N]^T \left[\frac{\partial R_{pl}}{\partial u} \right] J d\Omega_0 \quad (2.128)$$

$$\begin{aligned} K^{TT} &= \left[\frac{\partial [R^T]}{\partial T} \right] = \left[\int_{\Omega_0} [N]^T \frac{\rho C_v}{\Delta t} [N] J d\Omega_0 \right] - \int_{\Omega_0} [N]^T \left[\frac{\partial R_{pl}}{\partial T} \right] J d\Omega_0 - \\ &\int_{\partial\Omega_0} [N]^T \left[\frac{\partial \bar{q}}{\partial T} \right] J_s d\partial\Omega_0 + \int_{\partial\Omega_0} [N]^T \left[\frac{\partial q_f}{\partial T} \right] J_s d\partial\Omega_0 + \int_{\Omega_0} [B]^T (k) [B] J d\Omega_0 \end{aligned} \quad (2.129)$$

Le calcul des différents termes de la matrice tangente nécessite l'intégration des équations de comportement et de frottement pour calculer les incréments de toutes les variables d'état. La Figure 2- 7 donne un algorithme de résolution par un schéma de type statique implicite [L3].

1. Conditions initiales : $n = 0 ; T = T_0 ; u = u_0$

2. Actualisation des différentes variables : $T_{n+1} = T_n ; u_{n+1} = u_n ; \sigma_{n+1} = \sigma_n$

3. Calcul les flux de chaleur internes et des forces internes :

$$\left[G_{j|int}^k \right] \quad et \quad \left[F_{j|int}^k \right]$$

4. Calcul des matrices tangentes : $K_{MM} ; K_{TT} ; K_{MT} ; K_{TM}$

5. Calcul des flux de chaleur externes et des forces externes :

$$\left[G_{j|ext}^k \right] \quad et \quad \left[F_{j|ext}^k \right]$$

6. Résolution des équations hors équilibre :

$$\begin{cases} R^M = - \int_{\Omega_0} [B]^T \sigma J d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} [N]^T f J d\Omega_0 + \int_{\partial\Omega_0} [N]^T t J_s d\partial\Omega_0 + \int_{\partial\Omega_0} [N]^T t_c J_s d\partial\Omega_0 = 0 \\ R^T = \left[\int_{\Omega_0} [N]^T \rho C_v [N] J d\Omega_0 \right] \dot{T} - \int_{\Omega_0} [N]^T R_{pl} J d\Omega_0 + \int_{\partial\Omega_0} [N]^T \bar{q} J_s d\partial\Omega_0 + \\ \int_{\partial\Omega_0} [N]^T q_f J_s d\partial\Omega_0 + \int_{\Omega_0} [B]^T (kT) [B] J d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} [N]^T J \pi d\Omega_0 = 0 \end{cases}$$

7. Contrôle de la convergence des équations hors équilibre :

- Si la condition de convergence est satisfaite, aller à l'étape 2
- Sinon, passer à la suite

8. Calcul des nouvelles températures et des déplacements par la méthode de Newton-Raphson

9. Calcul des nouveaux taux de températures et de déplacement

10. Évaluation des nouvelles propriétés du matériau avec les nouvelles températures

11. Contrôle de la convergence avec les nouveaux incréments de températures et de déplacement

- Si oui : on retourne à l'étape 2 pour un nouveau pas jusqu'à la fin des itérations
- Si non : on retourne à l'étape 3

Figure 2- 8 : Algorithme de résolution par un schéma de type statique implicite [L3]

- **Méthode dynamique explicite du couplage thermomécanique [L3]**

Problème mécanique

La méthode explicite implémentée dans Abaqus explicite pour simuler les procédés de fabrication est celle basée sur la technique des différences finies centrées. Elle consiste à calculer une solution à l'instant $t + \Delta t$ en fonction des quantités connues à t (pour des problèmes impliquant de fortes non-linéarités, il faut utiliser un incrément variable de temps).

Cette méthode est efficace car la matrice masse est diagonale et l'accélération au début de chaque incrément est donnée par :

$$\ddot{u} = [M]^{-1} \{ [F_{ext}] - [F_{int}] \} \quad (2.130)$$

Si on connaît l'accélération, les équations du mouvement pour le solide sont intégrées en utilisant la méthode des différences finies centrées explicite d'intégration qui se traduit par :

$$\begin{aligned} \dot{u}_{i+\frac{1}{2}} &= \dot{u}_{i-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t_{(i+1)} + \Delta t_{(i)}}{2} \ddot{u}_{(i)} \\ u_{(i+1)} &= u_{(i)} + \Delta t_{(i+1)} \dot{u}_{i+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.131)$$

La stabilité d'un schéma explicite est donnée par la taille du pas de temps Δt . Une approximation de la limite de stabilité de la solution mécanique est donnée par :

$$\Delta t \approx \frac{L_{\min}}{C_d} \quad (2.132)$$

où $L_{\min}$ et C_d représentent respectivement la plus petite dimension de l'élément du maillage et la vitesse d'une onde solide traversant l'élément. Cette vitesse peut être calculée comme suit à partir des constantes élastiques du matériau:

$$C_d = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (2.133)$$

où ρ est la densité du matériau et λ et μ représentent les constantes effectives de Lamé. La figure 2- 9 donne un algorithme de résolution pour un problème mécanique par un schéma d'intégration explicite [L3].

1. Calcul de la matrice masse M et de la matrice de rigidité élastique initiale K
2. Conditions initiales : $n = 0 ; T = T_0 ; u = u_0$
3. Estimation du pas de temps
4. Mise à jour des déplacements pour l'incrément n :

$$u_n = u_{(n-1)} + \Delta t_n \dot{u}_{n-\frac{1}{2}}$$

5. Calcul des forces internes : $[F_{int}^k]$

6. Calcul des forces externes : $[F_{ext}^k]$

7. Résolution des accélérations : $\ddot{u}_n$

$$\dot{u}_{n+\frac{1}{2}} = \dot{u}_{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t_n + \Delta t_{(n+1)}}{2} \ddot{u}_{(n)}$$

8. Calcul des nouvelles vitesses

12. Si le nombre d'itération est inférieur au nombre maximal de pas :

- Si oui : on retourne à l'étape 3
- Si non : fin

Figure 2- 10 : Algorithme de résolution pour un problème mécanique par un schéma d'intégration explicite [L3]

Problème thermique

La méthode d'intégration explicite est basée sur la méthode d'intégration d'Euler. On peut ainsi écrire à partir de l'équation 2.115, le système suivant :

$$[C]\dot{T}_n - [G_{ext}]_n + [G_{int}]_n = 0 \quad (2.134)$$

$$T_{n+1} = T_n + \Delta t_n \dot{T}_n \quad (2.135)$$

En combinant ces deux équations, on obtient :

$$\dot{T}_n = [C]^{-1} [[G_{ext}]_n - [G_{int}]_n] \quad (2.136)$$

$$T_{n+1} = T_n + \Delta t_n C^{-1} \left[[G_{ext}]_n - [G_{int}]_n \right] \quad (2.137)$$

De manière similaire au problème mécanique, une approximation de la limite de stabilité de la solution thermique est donnée par :

$$\Delta t \approx \frac{L_{\min}^2}{2\alpha} \quad (2.138)$$

où $\alpha = \frac{k}{\rho C_v}$ est la diffusivité du matériau, k étant la conductivité et C_v étant la chaleur

spécifique du matériau. La matrice de capacitance C est similaire à la matrice masse M , les procédures de résolution sont donc similaires (voir figure 2.9 pour l'algorithme de résolution).

1. Conditions initiales : $n = 0; T = T_0$
2. Estimation du pas de temps
3. Calcul des flux de chaleur internes
 - Calcul de la conductivité thermique en fonction de la température actuelle
 - Calcul du flux de chaleur
 - Calcul des flux internes $[G_{int}^k]$
 - Calcul du flux provenant de la contribution mécanique R_{pl}
4. Calcul des flux de chaleur externes : $[G_{ext}^k]$
5. Calcul du taux et du gradient de température : $\dot{T}_n$ et ∇T_n
6. Calcul des nouvelles températures T_{n+1}
7. Calcul des nouvelles vitesses $\dot{u}_{n+\frac{1}{2}} = \dot{u}_{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t_n + \Delta t_{(n+1)}}{2} \ddot{u}_{(n)}$
13. Si le nombre d'itération est inférieur au nombre maximal de pas :
 - Si oui : on retourne à l'étape 2
 - Si non : fin

Figure 2- 11 : Algorithme de résolution pour un problème thermique par un schéma d'intégration explicite [L3]

Couplage

Il existe deux types de couplage :

1. Un couplage fort qui requiert l'analyse simultanée de la température et des déformations, l'incrément du temps t_i au temps t_{i+1} est réalisée seulement lorsqu'un critère de convergence est atteint. Ce qui implique une ou plusieurs itérations.
2. Un couplage faible qui consiste à résoudre en plusieurs étapes. Cette méthode repose sur le fait que le pas de temps étant assez petit, l'influence de la variation d'un champ au cours de l'incrément sur le calcul des autres variables peut être négligée [7]. En pratique, dans ce cas où l'on ne s'intéresse qu'aux aspects mécaniques et thermiques on opère de la façon suivante :
 - On réalise une analyse de contact afin de connaître la nature des conditions limites mécaniques et thermiques en chaque point.
 - La distribution de température étant connue en début d'incrément, on en déduit en chaque point la réponse du matériau et on résout le problème mécanique.
 - On résout ensuite le problème thermique (température et contrainte thermique) en utilisant une fraction de la puissance volumique dissipée comme terme de source volumique et une fraction de la puissance dissipée en frottement comme terme de source surfacique (négligée dans notre cas).
 - On actualise la géométrie et la distribution de température en fonction des résolutions effectuées.

Le couplage fort possède l'avantage de contrôler l'erreur commise à chaque incrément grâce au critère de convergence. Pour le cas du couplage faible, la précision dépendra du pas de temps choisi, ainsi, plus le pas de temps est petit, plus la probabilité d'obtenir un résultat précis est élevée.

Dans le présent travail, nous optons pour un couplage faible qui est facile à utiliser avec des coûts de calcul raisonnables comme suit :

Problème thermomécanique

Conformément au type de couplage qu'on utilise, cet algorithme est séquentiel, on effectue un pas mécanique isotherme suivi d'un pas thermique à géométrie fixe .

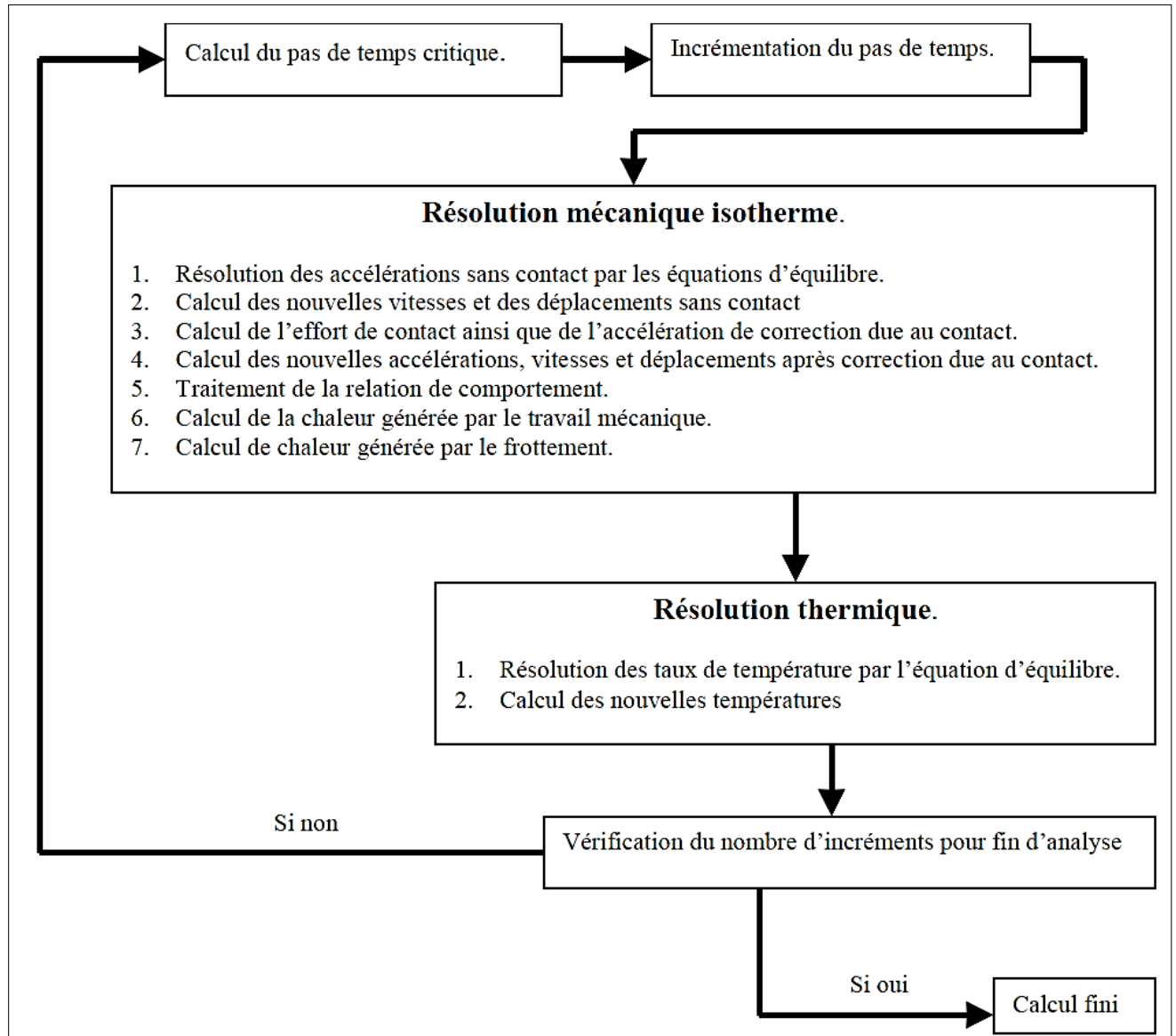


Figure 2- 12 : Algorithme de résolution thermomécanique général par un schéma d'intégration explicite [L3]

2.8. Résumé pour un problème thermomécanique

La complexité du problème thermomécanique réside en partie dans la résolution des différentes équations. En effet, la résolution mathématique d'un problème de forgeage à chaud requiert celle des équations d'évolution, de conservation et de conditions limites. Ci-dessous on regroupe les équations thermomécaniques à résoudre dans le cas du forgeage à chaud.

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_0} S_{ij} : \delta \dot{E}_{ij} d\Omega_0 - \int_{\partial\Omega_0} T_i \cdot \delta v_i da + \int_{\Omega_0} F_i \cdot \delta v_i d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \rho_0 \cdot \frac{D_0 v_i}{Dt} \cdot \delta v_i d\Omega_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega_0 \quad \text{équation d'équilibre} \\ \sigma^y = (A + B\varepsilon^n) \left(1 + C \ln \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \right) \left(1 - \left(\frac{T - T_{room}}{T_m - T_{room}} \right)^m \right) \quad \text{loi d'écoulement Johnson-Cook} \\ \sigma^y = (A + B\varepsilon^n) \left(1 + C \ln \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \right) \left(1 - \left(\frac{T - T_{room}}{T_m - T_{room}} \right)^m \right) H(T) \quad \text{loi d'écoulement Johnson-Cook modifié} \\ \sigma(x, t) \cdot n(x) = 0 \quad \text{surface libre} \\ \sigma(x, t) \cdot n(x) = T_d(x, t) \quad \text{sur } S_T \\ U(x, t) = U_d(x, t) \quad \text{sur } S_U \\ \int_{\Omega} \rho C_v \dot{T}_i \delta T_i d\Omega - \int_{\Omega} R_{pl} \delta T_i d\Omega - \int_{\Omega} k \nabla T_i \delta T_i d\Omega - \int_{\Omega} \pi \delta T_i d\Omega - \int_{A_q} q_{conv} \delta T_i d\partial\Omega = 0 \quad \text{équation de chaleur} \\ T(x, 0) = T_0 \quad \forall x \in \Omega \quad \text{condition initiale} \\ T = T_{imposée} \quad \text{sur } \Gamma_1 \times]0, t[\quad \text{condition de Dirichlet} \\ -k \overline{\nabla T} \cdot \vec{n} = \phi_{imposée} \quad \text{sur } \Gamma_2 \times]0, t[\quad \text{condition de Neumann} \\ -k \overline{\nabla T} \cdot \vec{n} = h_{ed} (T - T_{ext}) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times]0, t[\quad \text{condition de conduction} \\ -k \overline{\nabla T} \cdot \vec{n} = h (T - T_{ext}) \quad \text{sur } \Gamma_4 \times]0, t[\quad \text{condition de conv} \end{array} \right.$$

2.10. Intégration d'une loi de comportement

On présente dans cette section comment la loi de comportement est utilisée dans un algorithme d'élément fini pour un cas de matériau isotrope en grandes déformations élastoviscoplastiques [S12, S13, S14]. (Un algorithme complet est présenté à l'annexe 3).

Tout d'abord, on récapitule l'ensemble des variables nécessaires à la formulation de la loi de comportement en formulation matérielle et spatiale (tableau 2-2). Tel que rappelé à la section 2.4.1, pour les matériaux isotropes, il est possible et souvent plus simple et computationnellement plus efficace de formuler les équations constitutives dans la configuration actuelle en utilisant le tenseur de Cauchy-Green gauche élastique $\mathbf{b}^e$ et le tenseur des contraintes de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}$ [B3]. Bien que ce tenseur $\mathbf{b}^e$ soit élastique, il est directement lié au tenseur de déformation viscoplastique de Cauchy Green droit $\mathbf{G}^{vp}$ via la relation [I1] :

$$\mathbf{b}^e = \mathbf{F} \mathbf{G}^{vp} \mathbf{F}^T \quad (2.139)$$

$$\text{où } \mathbf{G}^{vp} = (\mathbf{C}^{vp})^{-1} = (\mathbf{F}^{vp^T} \mathbf{F}^{vp}), \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (2.140)$$

et $\mathbf{C}$, tenseur de déformation viscoplastique total.

La loi d'évolution de la plasticité sera alors donnée en termes de taux de variation du tenseur de Cauchy-Green gauche élastique $\mathbf{b}^e$ (dérivée objective) [I1] :

$$\dot{\mathbf{b}}^e = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F} \mathbf{G}^{vp} \mathbf{F}^T + \mathbf{F} \mathbf{G}^{vp} \mathbf{F}^T \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{F}}^T + \mathbf{F} \dot{\mathbf{G}}^{vp} \mathbf{F}^T \quad (2.141)$$

L'énergie libre de Helmholtz et le critère de plasticité s'écrit alors dans les axes principaux en termes des valeurs propres des variables tensorielles :

- Pour l'énergie libre on a : $\psi = \psi(\mathbf{b}^e, \boldsymbol{\alpha}, r, \mathbf{h}) \rightarrow \hat{\psi} = \hat{\psi}(\lambda_i^e, \alpha_i, r, h_i)$
- Pour le critère de plasticité on a : $f = f(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{X}, R, \mathbf{H}) \rightarrow \hat{f} = \hat{f}(\tau_i, z_i, a, \gamma_i)$

Tableau 2- 2 : Résumé des variables de modélisation en axes principales

Variables d'état Observables internes			Variables duales	Axes principaux	Theorie associée
ε : deformation T: temperature	matérielles	spatiales			ThermoElasticité
	$\mathbf{C}^{vp}$: plastic strain	F^e, b^e, λ_i^e	S: contraintes PK2 s : entropie $\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}}$	$\mathbf{T}$: contrainte Kirchhoff $\boldsymbol{\tau} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{b}^e} \mathbf{b}^e$	Plasticité
	r : écrouissage isotrope	r	R $R = \rho \frac{\partial \psi}{\partial r}$	a $a = - \frac{\partial \psi}{\partial r}$	Ecrouissage isotrope en plasticité,
	α : écrouissage cinématique	α_i	X $X_{ij} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_{ij}}$	Z_i $\alpha_i = \frac{\partial \psi}{\partial z_i} z_i$	Ecrouissage cinématique en plasticité
	h : variable microstructurale	h_i	H $H_{ij} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial h_{ij}}$	γ_i $\gamma_i = \frac{\partial \psi}{\partial h_i} h_i$	Microstructure

Soit donc un problème en cours de résolution par un code explicite formulé dans la configuration actuelle en utilisant le tenseur de Cauchy-Green gauche élastique $\mathbf{b}^e$. On dispose d'une solution pour le $n^{\text{ième}}$ pas de temps au temps t_n , et on veut passer au pas de temps suivant (n+1). On dispose donc des variables $\{F_n, b_n^e, N_{kn}\}$, respectivement le gradient de déformation, la mesure des déformations élastiques et du vecteur de variables internes caractérisant les déformations irréversibles dans le matériau ($N_K = \{r, \alpha_{ij}, h\}$). À partir de ces variables, on connaît aussi (σ_n, q_n) le tenseur des contraintes dans la configuration actuelle et les paramètres internes conjugués aux variables internes de type cinématique. La méthode des éléments finis explicite permet de résoudre géométriquement

pour le temps t_n en fournissant une valeur incrémentale de déplacement u_{n+1} sur la configuration ϕ_{n+1} au temps t_{n+1} avec un gradient relatif de déformation à $x_{n1} = \phi_{n+1}(X)$ défini par :

$$f_t(x_{n+1}) = I + \nabla u_t(x_{n+1}) \quad \forall t \in [t_n, t_{n+1}] \quad (2.142)$$

Ce gradient relatif de déformation permet de passer de la configuration au temps t à celle au temps $t+1$. Le gradient de déformation total est alors $F_t(X) = f_t(\phi_{n+1}(X))F_n(X)$. L'écoulement plastique et la déformation locale au point X dans l'intervalle de temps $[t_n, t_{n+1}]$ est donc défini par le système d'équations de premier ordre suivant :

$$\dot{f}_t = L_t f_t \quad (2.143)$$

$$\dot{b}_t^e = \left[L_t b_t^e + b_t^e L_t^T \right] - 2 \dot{\lambda}_t^p \frac{\partial \varphi(\sigma_t, q_t)}{\partial \sigma} b_t^e \quad (2.144)$$

$$\dot{\xi}_t = \dot{\lambda}_t^p \frac{\partial \varphi(\sigma_t, q_t)}{\partial q} \quad (2.145)$$

$$\dot{\lambda}_t^p \geq 0, \quad \varphi(\sigma_t, q_t) \leq 0, \quad \dot{\lambda}_t^p \varphi(\sigma_t, q_t) = 0 \quad (2.146)$$

où $L_t = \dot{F}_t F^{-1}$ est le gradient spatial de vitesse et (σ_t, q_t) sont les variables dépendantes définies à partir de variables indépendantes $\chi_t = \{f_t, b_t^e, N_{kt}\}$ par la loi de comportement :

$$\sigma_t = 2 \frac{\partial \psi(b_t^e, N_{kt})}{\partial b^e} b_t^e, \quad q_t = - \frac{\partial \psi(b_t^e, N_k)}{\partial N_k} \quad (2.147)$$

Sur ce système d'équations, sont appliquées les conditions initiales suivantes :

$$\chi_t \Big|_{t=t_n} = \{f_t, b_t^e, N_{kt}\} \Big|_{t=t_n} = \{1, b_t^e, N_{kn}\} = \chi_n \quad (2.148)$$

L'étape clé de la résolution est l'approximation du flux $t \in [t_n, t_{n+1}] \longrightarrow \chi_t$ via les équations 2.143 à 2.146 par un algorithme utilisant la méthode de résolution séquentielle (operator split) suivante :

PROBLÈME 1 : Évolution élastique avec plasticité figée (Trial state) :

$$\dot{f}_t = L_t f_t \quad (2.149)$$

$$\dot{b}_t^e = [L_t b_t^e + b_t^e L_t^T] \quad (2.150)$$

$$\dot{N}_{Kt} = 0 \quad (2.151)$$

Contraintes : aucune.

PROBLÈME 2 : Correction plastique par rabattement (return mapping)

$$\dot{f}_t = 0 \quad (2.152)$$

$$b_t^e = -2 \dot{\lambda}_t^p \frac{\partial \varphi(\sigma_t, q_t)}{\partial \sigma} b_t^e \quad (2.153)$$

$$\dot{N}_{Kt} = \dot{\lambda}_t^p \frac{\partial \varphi(\sigma_t, q_t)}{\partial q} \quad (2.154)$$

$$\text{Contraintes : } \dot{\lambda}_t^p \geq 0, \varphi(\sigma_t, q_t) \leq 0, \dot{\lambda}_t^p \varphi(\sigma_t, q_t) = 0 \quad (2.155)$$

La démarche de cette méthode de résolution séquentielle est simple. Comme dit plus haut, on dispose d'une solution incrémentale géométrique (un déplacement) fourni par la méthode des éléments finis explicite. La première étape est d'effectuer un test en supposant une évolution purement élastique pour laquelle le processus plastique, donc les paramètres caractérisant la plasticité, sont « gelés ». On met à jour la configuration et évalue les contraintes en supposant que l'incrément de contraintes pour passer de l'instant t à l'instant $t + \Delta t$ est élastique et on obtient alors $\sigma_{t+\Delta t}^{trial}$ et on a ainsi une solution pour le *PROBLÈME 1* défini par (équations 2.149 à 2.151).

Ensuite, on évalue la consistance de la solution test en évaluant le critère d'écoulement $\varphi^{trial}(\sigma_{t+\Delta t}^{trial}, q_{t+\Delta t}^{trial}) \leq 0$.

Si $\varphi^{trial}(\sigma_{t+\Delta t}^{trial}, q_{t+\Delta t}^{trial}) < 0$, alors l'hypothèse d'une évolution purement élastique est confirmée et la solution test est la bonne.

Par contre, si $\varphi^{trial}(\sigma_{t+\Delta t}^{trial}, q_{t+\Delta t}^{trial}) > 0$, alors cette hypothèse n'est pas valide et on doit ramener notre critère à 0 en effectuant un rabattement (*PROBLÈME 2*) au cours duquel

les variables indépendantes et dépendantes sont révisées pour inclure la plasticité. L'algorithme complet est donné en annexe 3.

2.11. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la théorie sur les grandes déformations ainsi que les aspects numériques et la discrétisation par la méthode des ÉF. De là, nous avons abouti à un système thermomécanique non-linéaire à résoudre pour le problème du forgeage à chaud qui comprend :

1. Le problème mécanique régi par la déformation mécanique du matériau sous l'action des matrices de forgeage.
2. Le problème thermique régi par la température des composantes (échange entre matrices/pièce et milieu ambiant) et de la chaleur provenant du travail mécanique (déformation plastique convertie en chaleur) et du frottement (négligé dans notre cas).
3. Le problème de conditions limites thermiques et mécaniques régi par les conditions régnant aux différentes interfaces entre la pièce et les outils.
4. Le schéma de résolution explicite appliqué au problème.

Ce chapitre a permis de voir la complexité des interactions pour une analyse adéquate d'un problème thermomécanique. Comme la loi de Johnson-Cook (ou Johnson-Cook modifié) comporte des paramètres inconnus pour le matériau sous étude et difficiles à trouver dans la littérature, nous consacrons le prochain chapitre à la caractérisation du matériau et du procédé de forgeage. Aussi, à partir de modèles simples de tests de compression axiale et latérale, l'identification des paramètres et la validation numérique des outils de simulation utilisés seront effectuées et seront suivies de l'étude du forgeage d'une pièce.

Chapitre 3

Caractérisation de l'alliage AA7175 et du procédé de forgeage

Dans ce chapitre, on présente les différents tests de caractérisation du matériau afin de déterminer les paramètres du modèle de Johnson-Cook pour la simulation du forgeage. Les tests sont repris en simulation et les résultats numériques sont validés par une comparaison avec les résultats expérimentaux. On abordera également la formulation CEL (couplage eulérien lagrangien) pour la simulation du forgeage, la modélisation numérique et expérimentale du procédé de forgeage d'une pièce simple et l'analyse des résultats qui s'y rattachent.

3.1. Introduction

Dans le cadre de l'intégration de la modélisation du matériau et du procédé, la connaissance du matériau est primordiale et est à la base d'une modélisation numérique précise. Dans le cas de l'alliage AA7175, les propriétés sur une large gamme de température et de taux de déformation ne sont pas accessibles dans la littérature. Il faut donc procéder à différents tests de caractérisation du matériau afin de :

- connaître l'état microstructural du matériau,
- vérifier l'asymétrie traction-compression du matériau,
- vérifier l'anisotropie du matériau, et
- déterminer les paramètres d'écoulement du matériau.

Et pour obtenir ces informations, nous allons procéder à des tests de caractérisation microstructurale, des tests de traction et des tests de compression.

Grâce à l'information recueillie des tests de caractérisation, il nous sera possible de :

- comprendre comment le matériau se comporte en condition de mise en forme et,
- identifier et valider des paramètres matériaux nécessaire à la loi de comportement choisie par des tests de compression axiale et latérale.

Par ailleurs, l'étude numérique (outils de simulation) et expérimentale du procédé est un point essentiel à la compréhension et à l'atteinte des objectifs de modélisation précise. Ainsi, outre la caractérisation, on présente dans ce chapitre la modélisation numérique et expérimentale d'une pièce simple soumise aux différentes étapes de modélisation et fabrication :

- design et développement numérique d'une pièce à forger en tenant compte de la capacité des presses de forgeage disponible ;

- simulation du forgeage de la pièce simple ;
- création des outils et pièce pour forgeage expérimental ;
- validation des résultats numériques par comparaison avec le forgeage expérimental ;
- étude numérique et expérimentale du refroidissement après forgeage.

Nous présentons dans le tableau 3-1, ci-dessous, un résumé de l'approche séquentielle de résolution adoptée.

Tableau 3 - 1: Approche de résolution adoptée

<i>Test de caractérisation, d'identification et de validation</i> Essais expérimentaux - test de compression Identification des paramètres matériaux - loi de comportement Test de validation des paramètres - compression latérale - simulation numérique	<i>Développement numérique sur la pièce simple (Abaqus)</i> Design de l'outillage et de la pièce Conception CAO Simulation numérique du procédé Forgeage Refroidissement Trempe Contraintes résiduelles	<i>Développement expérimental sur la pièce simple</i> Fabrication des outillages et de la pièce Développement expérimental du procédé Forgeage Refroidissement Trempe Contraintes résiduelles
Étape 1	Étape 2	Étape 3

3.2. Procédures expérimentales

Dans la plupart des procédés de mise en forme tels que le forgeage, l'extrusion, etc., la pièce est soumise à des forces de compression. Afin d'évaluer l'effet de ces forces de

compression et certaines propriétés thermomécaniques de la pièce au cours de la mise en forme, il faut procéder à des tests de caractérisation du matériau.

Les échantillons utilisés sont de forme cylindrique, mais de dimensions différentes à cause de la limite de la presse qui est de 250 KN. On utilise donc des échantillons de 25,4 mm de diamètre par 25,4 mm de hauteur pour les tests à 400°C et des échantillons de 19,05 mm de diamètre par 19,05 mm de hauteur pour les tests à température ambiante, à 200°C et à 300°C. En vue de minimiser le frottement entre l'échantillon et les outils lors de la déformation, les extrémités de l'échantillon ont été enduites de lubrifiant constitué d'un mélange de 50% d'huile de formage et de 50% de graphite. Les essais sont effectués sur une machine de compression (MTS 810 250 KN) et le système d'acquisition que l'on utilise est le contrôleur de la presse. Ce système se nomme Flex Test 40 de la compagnie MTS. Les essais couvrent des plages de température allant de 25°C à 400°C à des taux de déformation de 0,00133/s et de 0,1/s. La figure 3-1 montre le dispositif et les échantillons avant et après le test et tableau 3-2 résume le plan de test pour la caractérisation du matériau. L'ensemble des tests de compression présentés dans le présent travail est effectué selon la procédure décrite ci-dessus.

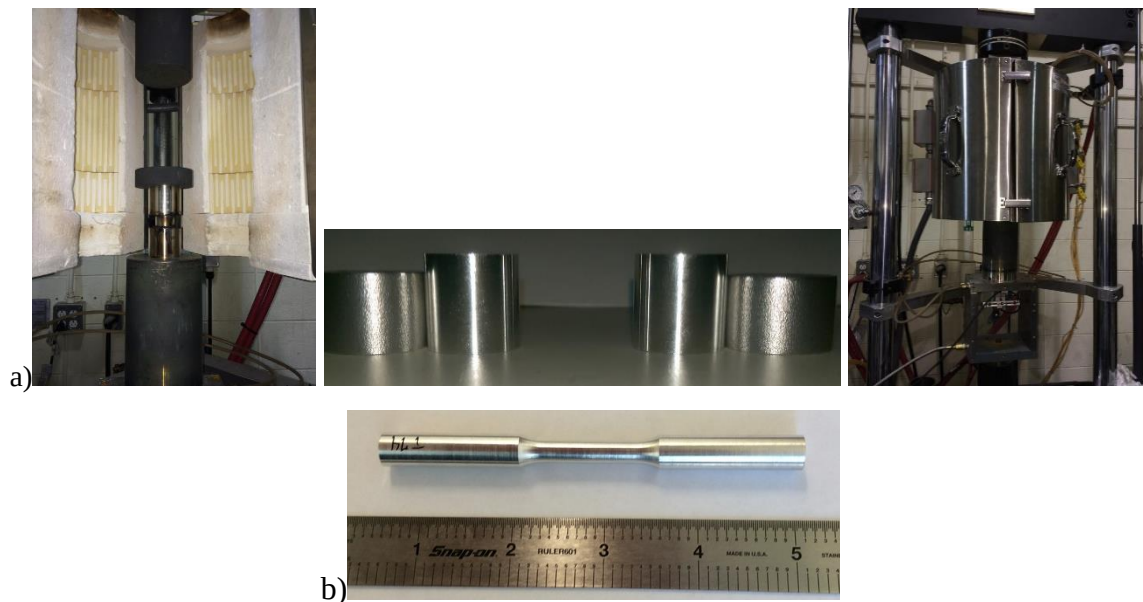


Figure 3- 1 : a) Machine et échantillon de compression, b) Échantillon de traction

On présente au tableau 3-2 le plan de tests élaboré pour la caractérisation.

Tableau 3 - 2: Plan de test de caractérisation du matériau

	Dans la direction longitudinale	Dans la direction transverse	Objectif
19,05 mmx19,05 mm en compression à $\dot{\epsilon}_0=0,133/s$ et $\dot{\epsilon}_0=0,00133/s$	4 tests à 400°C 4 tests à 300°C 4 tests à 200°C 4 tests à 25°C	4 tests à 400°C 4 tests à 300°C 4 tests à 200°C 4 tests à 25°C	1-Vérifier l'anisotropie 2-Vérifier la dépendance à la vitesse de déformation 3-Déterminer les paramètres de la loi de comportement
	2 tests à 400°C $\dot{\epsilon}_0=0,00133/s$		
114,3 mm x 9,525 mm en traction	3 tests à 400°C	3 tests à 400°C	Vérifier la symétrie par rapport à la compression
19,05 mmx19,05 mm en compression à $\dot{\epsilon}_0=0,133/s$ et $\dot{\epsilon}_0=0,00133/s$	2 tests de 250 à 400°C par intervalle de 25°C	---	Déterminer les paramètres de recristallisation s'il y'a lieu

Pour l'ensemble des autres tests présentés, un minimum deux répétitions est effectué.

En plus des tests décrits au tableau 3-2, la microstructure est aussi caractérisée tel qu'on peut le voir dans la section suivante.

- Caractérisation microstructurale

A regard des informations fournies à la section 1.5 du chapitre 1, la connaissance de la microstructure du matériau est une étape importante de notre processus de caractérisation. Les différents éléments caractéristiques de la microstructure (la forme, la taille et l'orientation des grains) définissent en partie les propriétés mécaniques du

matériau. D'où l'intérêt de faire des métallographies en vue d'une meilleure compréhension du comportement du matériau vis-à-vis de son état microstructural.

Par ailleurs, cette étape est importante puisqu'elle permet de choisir l'emplacement de nos échantillons de tests de compression, de traction et de forgeage lors de leur extraction du bloc de matière première extrudé. En effet, le forgeage de la pièce industrielle se fait à partir d'une billette cylindrique extrudée. Cependant, nous n'en disposons pas en quantité suffisante pour nos tests. Pour l'ensemble de nos tests de caractérisation et de forgeage, il nous a été fourni par l'industrie un matériau sous forme de bloc rectangulaire (figure 3-2). Ainsi, afin d'effectuer nos tests de caractérisation et de forgeage avec un matériau représentatif de la structure de la billette cylindrique, nous procédons à une caractérisation de la microstructure du bloc de matériau. Par la suite, une comparaison avec la microstructure de la billette est effectuée, la zone du bloc de matériau où la microstructure est plus représentative de celle de la billette (figure 3-3) sera utilisée pour nos différents tests.

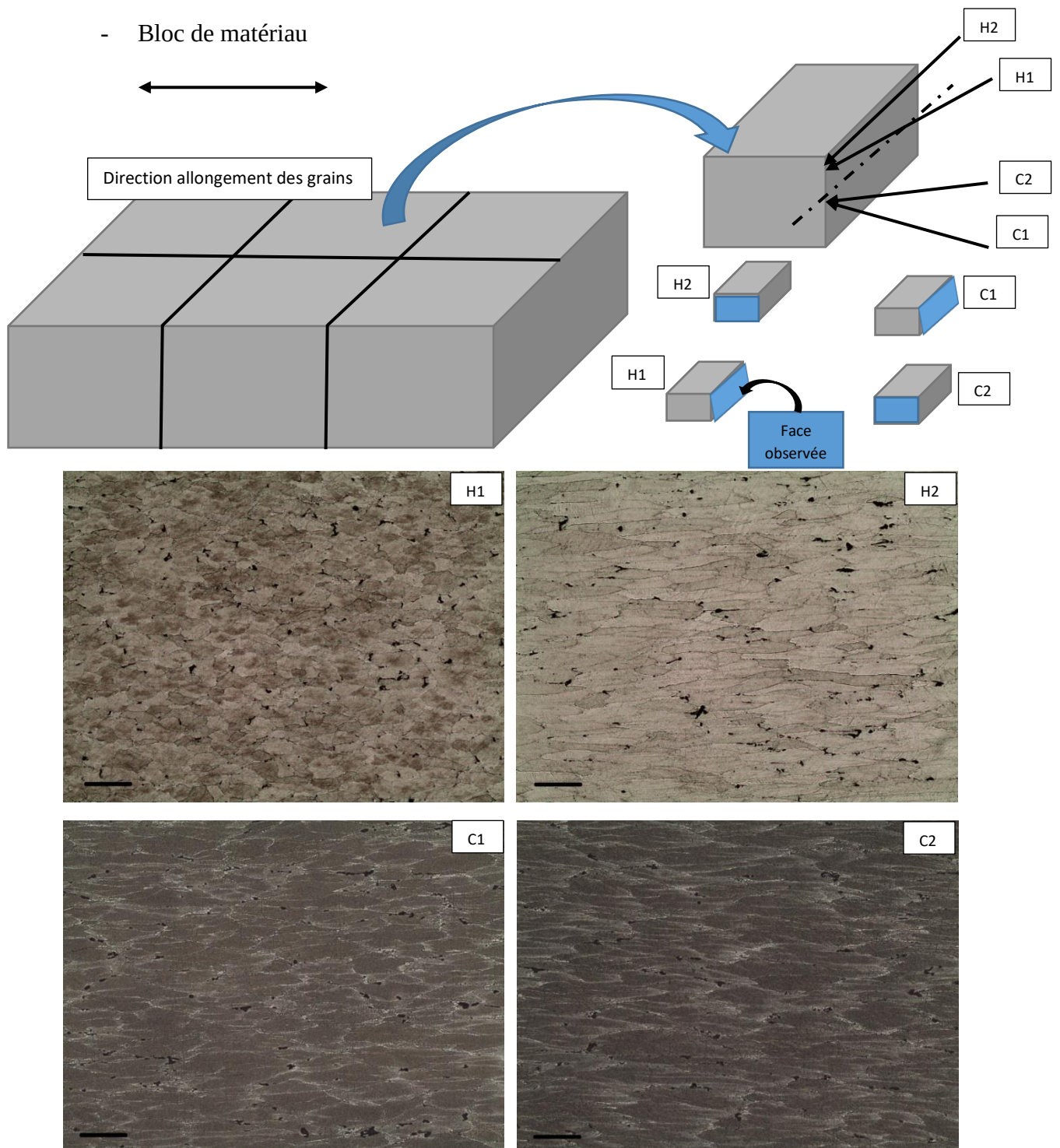


Figure 3- 2 : Emplacement des échantillons sur le bloc de matériau et la microstructure associée (échelle = 200 microns)

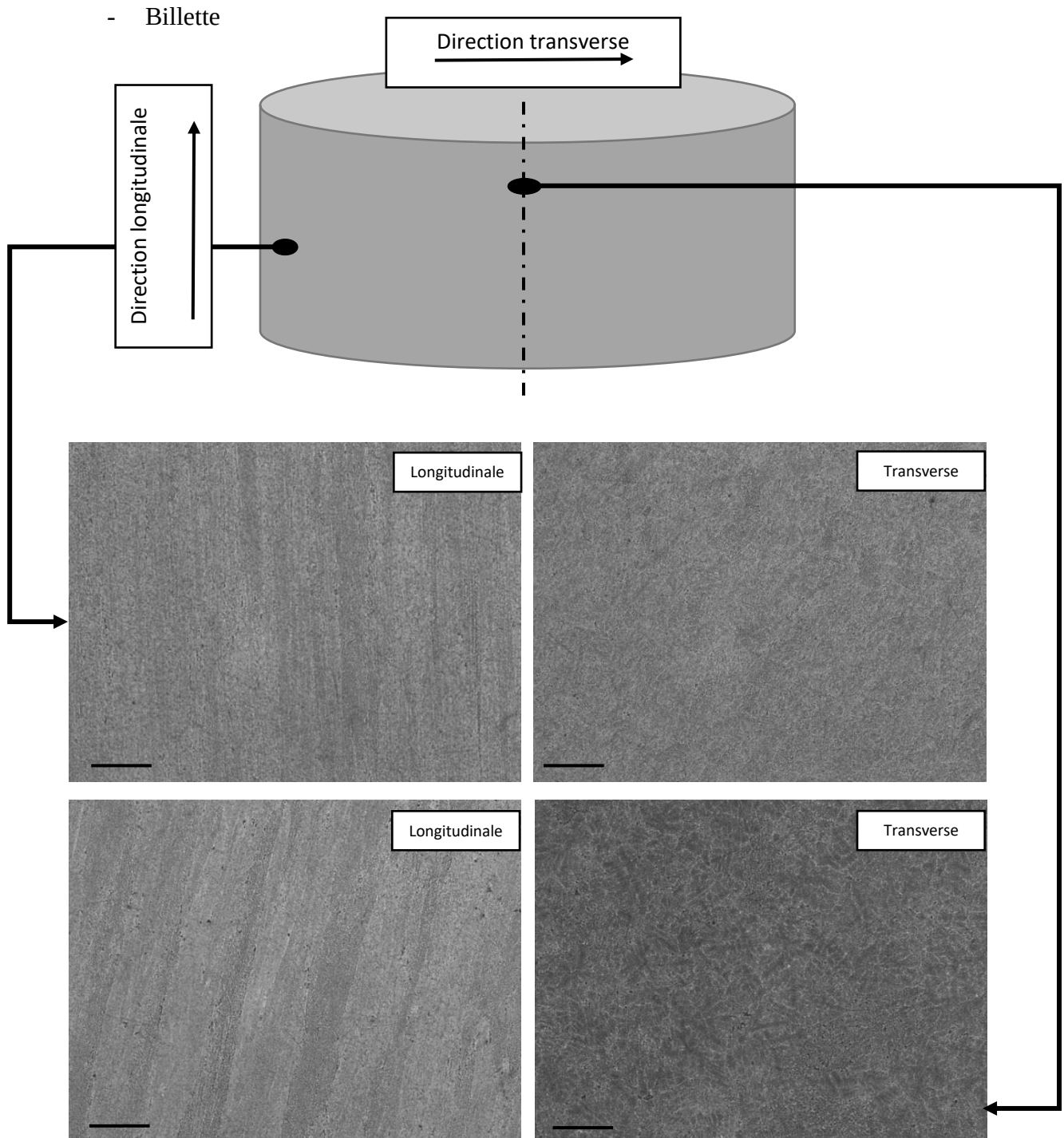


Figure 3- 3 : Emplacement des échantillons sur la billette et la microstructure associée
(Échelle = 200 microns)

On observe qu'au niveau du bloc de matériau, les grains sont un peu plus fins et de forme plus allongée sur la face extérieure qu'au centre du bloc, tel que montré à la figure

3-2. Pour ce qui est de la billette, on remarque une différence dans la taille des grains, plus fins sur les bords, et plus grossiers au centre de la billette (voir figure 3-3) et tel qu'attendu, les grains sont allongés dans la direction d'extrusion.

La structure observée au niveau du bord du bloc de matériau s'approche plus de la structure de la billette, les grains sont plus fins et allongés alors qu'au centre du bloc, les grains sont plus gros et équiaxes (aléatoires). De ce fait, nos échantillons de tests seront pris au niveau proche du bord dans le bloc de matériau.

Une fois l'emplacement déterminé, nous allons maintenant procéder aux tests de compression axiale et latérale et de traction pour déterminer les propriétés mécaniques du matériau selon différentes conditions de tests.

Dans l'ensemble des tests qui seront présentés dans ce rapport, le terme transverse désigne les échantillons coupés dans le sens transverse à la direction des grains et le terme longitudinal désigne les échantillons coupés dans le même sens que la direction d'allongement des grains.

- Test d'anisotropie du matériau

La figure 3-4 présente les courbes obtenues lors des tests de compression dans les directions longitudinale et transverse. On ne remarque pas d'anisotropie des propriétés, les échantillons compressés selon l'axe longitudinal ont des propriétés semblables à ceux compressés dans la direction transversale. Ainsi les tests subséquents seront tous faits avec des échantillons longitudinaux pour garder une certaine uniformité.

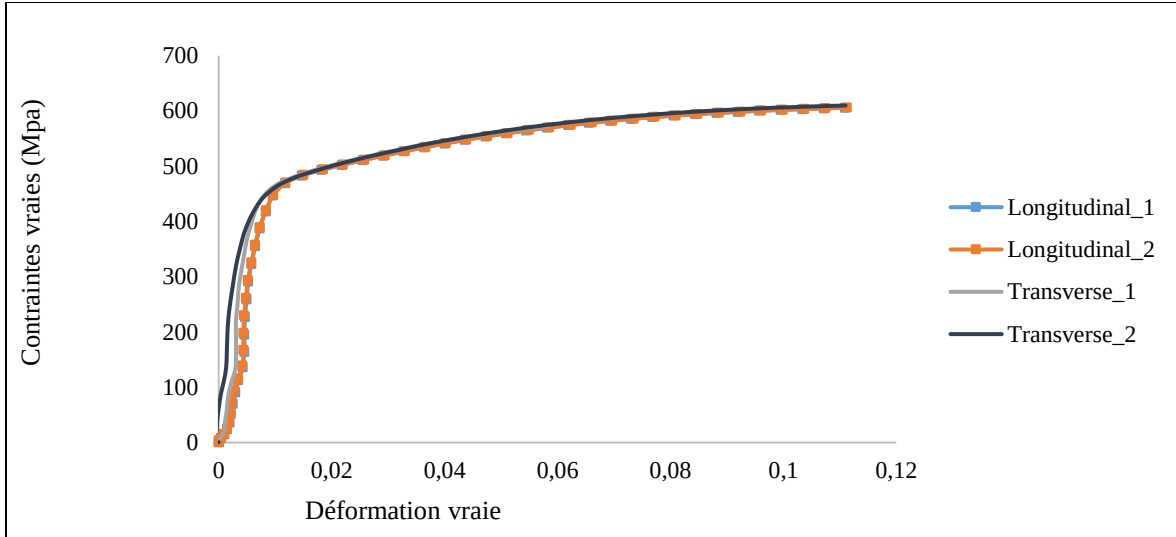


Figure 3- 4: Courbes contrainte-déformation en compression à température ambiante pour un taux de déformation de 0.1 s^{-1} : comparaison des échantillons dans le sens transverse versus les échantillons dans le sens longitudinal.

- Test d'asymétrie traction-compression du matériau

À la figure 3-5, des courbes de traction et compression à température ambiante sont présentées. On observe une certaine asymétrie pour le comportement mécanique dans les résultats en traction et en compression. Globalement, les résultats en compression sont plus élevés en termes de contraintes soit 4.3% de variabilité entre les courbes de traction et celles de compression, ce qui pourrait être lié soit au test lui-même (peut être une mauvaise prise en compte de l'influence de la friction entre l'échantillon et les outils lors des tests de compression par exemple ; à cet effet un test de validation du coefficient de frottement sera présenté ultérieurement), soit aux propriétés du matériau lui-même (asymétrie cristallographique). Une étude de l'arrangement de la structure cristallographique du matériau serait à effectuer afin de pouvoir statuer de manière précise sur les raisons possibles de cette asymétrie, toutefois cela sort du cadre de notre étude.

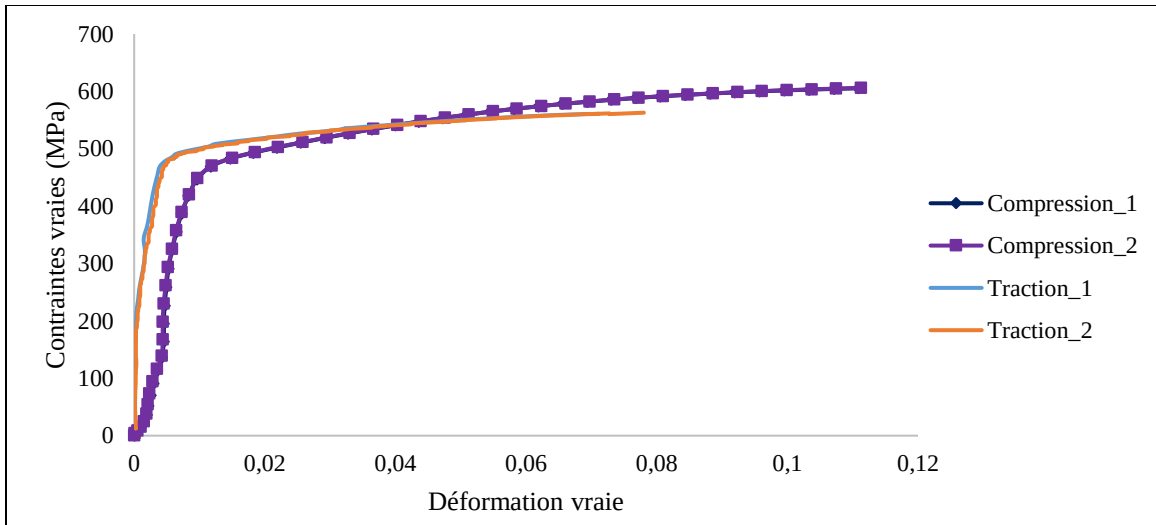


Figure 3- 5 : Comparaison des courbes de compression et de traction à température ambiante à un taux de déformation de 0,1/s dans le sens longitudinal.

- Test pour déterminer les paramètres d'écoulement du matériau

Des tests de compression avec la procédure définie à la section 3.2 sont effectués pour différentes conditions de tests. Les courbes contraintes-déformation ci-dessous seront utilisées pour trouver les paramètres de Johnson-Cook (voir tableau 3-2).

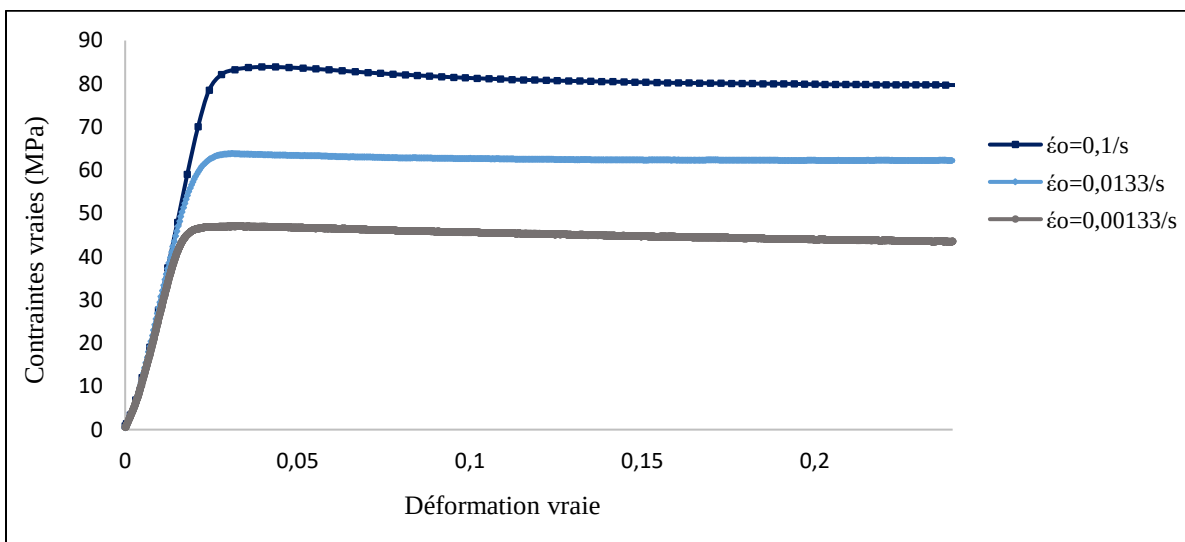


Figure 3- 6: Courbes contraintes-déformation à 400 °C à différents taux de déformation

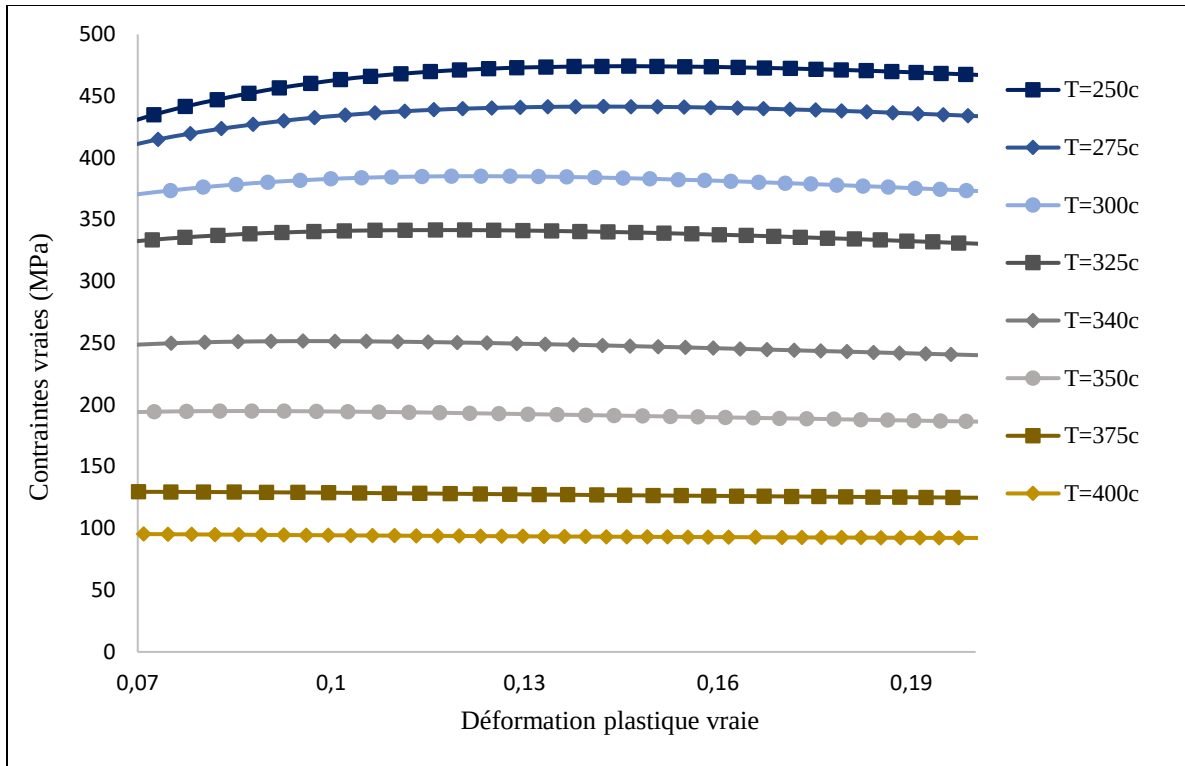


Figure 3- 7: Courbes contraintes-déformation à différentes températures, $\dot{\epsilon}_0=0,133/s$

Les courbes de la figure 3-6 montrent la sensibilité à la vitesse de déformation du matériau à 400 °C. La dépendance de la contrainte au taux de déformation suit une loi de type logarithmique. On remarque par ailleurs à la figure 3-7, que, plus la température augmente, plus on tend vers un comportement de plasticité parfaite (courbe à 400 °C). En effet, plus on chauffe le matériau plus il devient mou et facile à déformer.

Les résultats de ces tests vont servir dans la section suivante à déterminer les paramètres de la loi de comportement de Johnson-Cook. Une procédure proposée par Dorogoy et al. [D2] est utilisée.

3.3. Procédure d'identification des paramètres de la loi de comportement de Johnson-Cook

Soit la loi d'écoulement déjà présentée à l'équation 3.1 :

$$\sigma_f = \left[A + B(\varepsilon_p)^n \right] \left[1 + C \ln \left(\frac{\dot{\varepsilon}_p}{\dot{\varepsilon}_{p0}} \right) \right] \left[1 - \left(\frac{T - T_r}{T_m - T_r} \right)^m \right] = f_1(\varepsilon_p) f_2(\dot{\varepsilon}_p) f_3(T) \quad (3.1)$$

Pour une méthode de détermination directe des paramètres A, B et n, des essais de tensions, compression et de torsion sont suggérés.

Pour le coefficient m, un chauffage adiabatique doit être envisagé.

Pour simplifier, on mettra $\varepsilon = \varepsilon_p$ et $\dot{\varepsilon}_0 = \dot{\varepsilon}_{0p}$

- Identification de A, B et n

La fonction $f_1(\varepsilon_p)$ (fonction d'écrouissage) décrit la contrainte d'écoulement suivant les conditions suivantes :

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_0 \text{ et } T = T_r$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Pour } \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_0, f_2(\dot{\varepsilon}) = 1 + C \ln 1 = 1 + 0 = 1 \\ \text{Pour } T = T_r, f_3(T) = 1 - 0 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma_f = A + B(\varepsilon)^n = f_1(\varepsilon) \quad (3.2)$$

$$\sigma - A = B\varepsilon^n \Rightarrow \ln(\sigma - A) = \ln B + n \ln \varepsilon \quad (3.3)$$

Il existe une relation linéaire entre $\ln(\sigma - A)$ et $\ln \varepsilon$, de la forme $y = ax + b$

$$\begin{aligned} y &= ax + b \\ \ln(\sigma - A) &= (\ln \varepsilon) n + \ln B \end{aligned} \quad (3.4)$$

où n est la pente et lnB l'intersection avec l'axe des ordonnées. A est la limite élastique déterminée directement à partir des tests de compression.

Procédure : Faire trois tests à différents taux de déformation et faire une moyenne des valeurs de A, B et n obtenues.

- **Identification de C**

À partir de l'équation 3.1, on peut trouver l'expression de C donnée par :

$$C = \left[\frac{\sigma}{[A + B(\dot{\varepsilon})^n] \left(1 - \left(\frac{T - T_r}{T_m - T_r} \right)^m \right)} - 1 \right] \left[\ln \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \right]^{-1} \quad (3.5)$$

Pour une valeur de $\dot{\varepsilon}$ fixée, C pourrait être déterminé par une valeur de $\dot{\varepsilon}$ (déformation) et la contrainte σ correspondante.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Pour } \dot{\varepsilon} = 0 \\ \text{Pour } T = T_r \end{array} \right\} \Rightarrow C = \left(\frac{\sigma}{A} - 1 \right) \left[\ln \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right]^{-1} \quad (3.6)$$

Procédure : Faire trois tests à différents taux de déformation et faire une moyenne des valeurs de C obtenues.

- **Identification de m**

Des tests quasi-statiques isothermes à différentes températures sont utilisés pour déterminer l'effet de la température sur le comportement du matériau. Une méthode simple de détermination du paramètre m et d'obtenir des points discrets par des essais quasi-statiques à des températures différentes.

$$f_3(T) = 1 - \left(\frac{T - T_r}{T_m - T_r} \right)^m \quad (3.7)$$

Si les tests quasi statiques avec un même taux de déformation $\dot{\epsilon}$, sont effectués à deux températures différentes, le rapport des contraintes à une déformation plastique ϵ spécifique peut être exprimé par :

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\left[1 - \left(\frac{T - T_r}{T_m - T_r} \right)^m \right]_1}{\left[1 - \left(\frac{T - T_r}{T_m - T_r} \right)^m \right]_2} \quad (3.8)$$

Pour $T_2 = T_r$, $\sigma_2 = \sigma_r$ d'où :

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_r} = \frac{\left[1 - \left(\frac{T - T_r}{T_m - T_r} \right)^m \right]_1}{1} \quad (3.9)$$

Alors m est donné par :

$$m = \frac{\ln \left[1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_r} \right]}{\ln \left(\frac{T - T_r}{T_m - T_r} \right)} \quad (3.10)$$

où σ_r est la contrainte pour une déformation plastique et vitesse de déformation à $T = T_r$ et σ_1 est la contrainte pour la même déformation plastique à haute température (T_1).

Ci-dessous, le tableau 3-3 résume les paramètres de la loi de Johnson-Cook déterminés suivant la procédure décrite.

Tableau 3 - 3: Paramètres de Johnson-Cook Al 7175

A (MPa)	B (MPa)	C	n	m	T_m (°C)	T_{room} (°C)	$\dot{\epsilon}_0$ (s-1)	T_{ref} (°C)
420	465	0,862	0,5088	0,081	641	25	0.1	25

3.3.1. Validation du coefficient de friction

Afin de valider le coefficient de friction utilisé dans nos simulations, nous avons testé différentes valeurs de coefficient de friction en simulation. Les contraintes d'écoulement obtenues sont comparées avec l'expérimental (moyenne de 3 tests) afin de voir quel coefficient s'approche le mieux de celui de l'expérimental. Il s'agit ici d'un test de compression d'un échantillon cylindrique de 25,4 mm de diamètre par 25,4 mm de hauteur à 400°C à une vitesse de déformation de 2,54 mm/s.

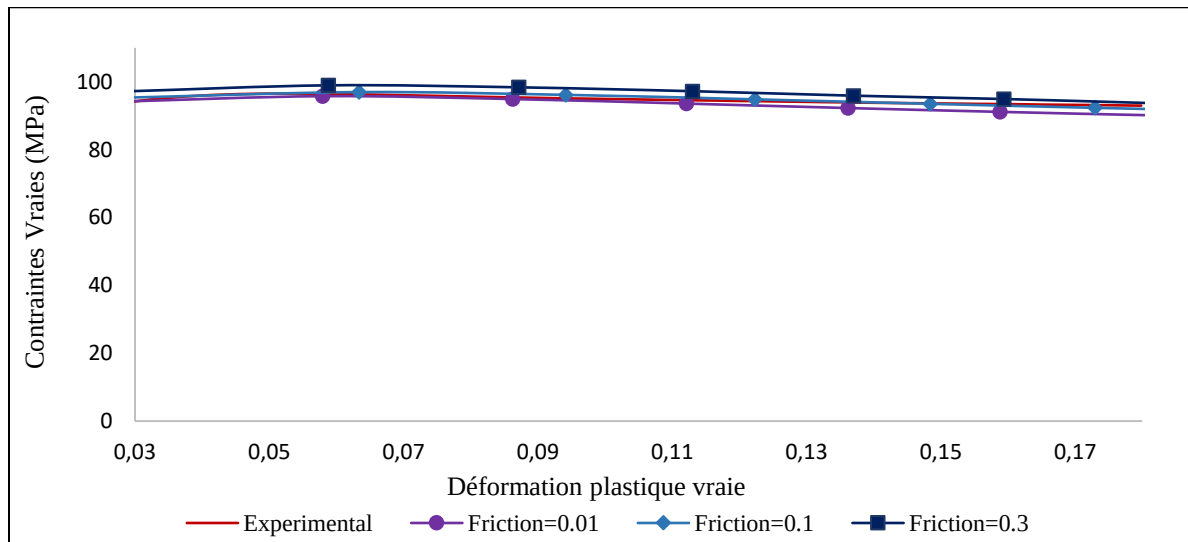


Figure 3- 8 : Influence du coefficient de friction sur les courbes contraintes-déformation lors des simulations du test de compression à $T=400^{\circ}\text{C}$ et $\dot{\epsilon}_0=0,1/\text{s}$

Les courbes pour les différentes valeurs de coefficient de friction (figure 3-8) se situent à l'intérieur de la plage d'erreur acceptable du test expérimental, soit 1,23% pour $f=0,01$, 0,7% pour $f=0,1$ et 2,8% pour $f=0,3$. Ainsi, pour ce test, on conclut que le coefficient de friction n'a pas d'influence significative sur la courbe d'écoulement lors des simulations pour des niveaux de déformation de l'ordre de 20%. De ce fait, $f=0,1$ est choisi comme coefficient de friction dans nos simulations puisqu'il offre la plus petite erreur. Toutefois, l'effet du coefficient de frottement sur la contrainte d'écoulement simulée pourrait d'avérer plus important lorsque de grandes déformations seront impliquées.

3.4. Validation des paramètres déterminés

La validation des paramètres de Johnson-Cook s'est faite par comparaison des résultats de simulation des tests de compression utilisant les paramètres présentés au tableau 3-3 avec les résultats expérimentaux. Une bonne corrélation entre les résultats (voir figures 3-10, 3-11 et 3-12) a permis de valider les paramètres de la loi (tableau 3-3). Le même test de compression (expérimental) est reproduit en simulation avec les mêmes conditions de vitesse (2,54mm/s) et de température (400 °C).

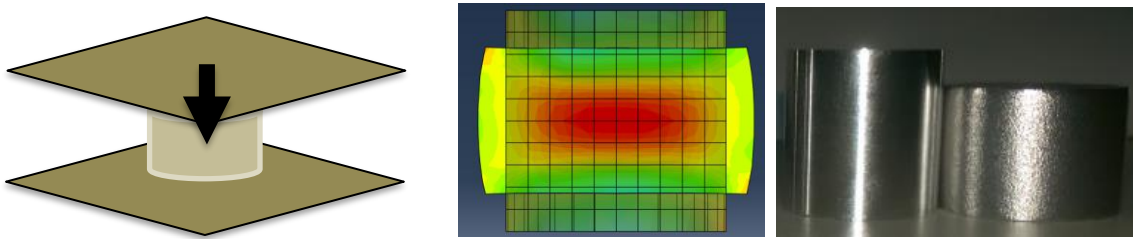


Figure 3- 9: Test de compression axiale

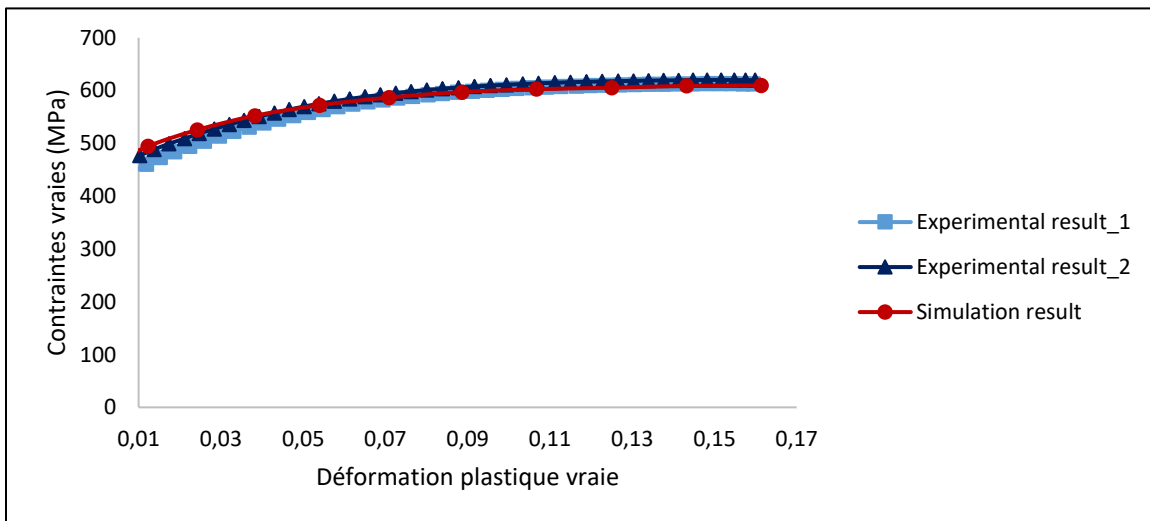


Figure 3- 10: Comparaison : expérimental vs simulation avec Johnson-Cook à 25 °C
 $\dot{\epsilon}_0=0,133/s$

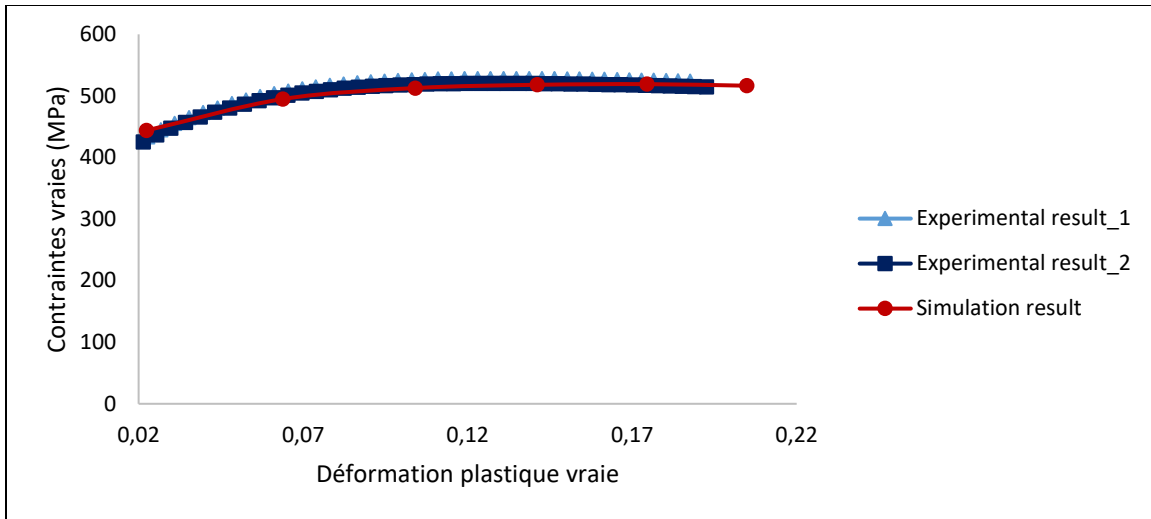


Figure 3- 11: Comparaison : expérimental vs simulation avec Johnson-Cook à 200 °C
 $\dot{\epsilon}_0=0,133/s$

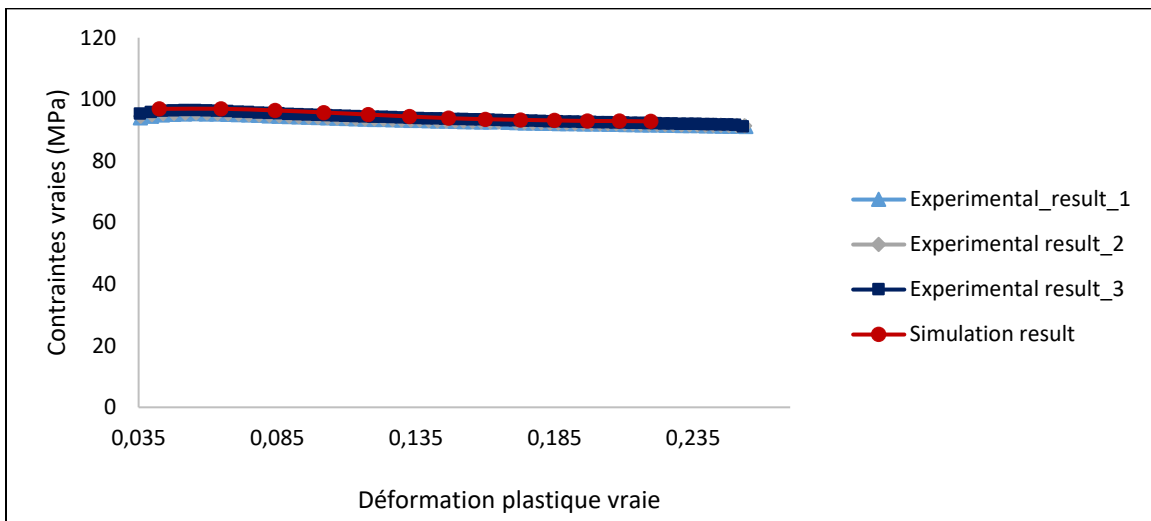


Figure 3- 12: Comparaison : expérimental vs simulation avec Johnson-Cook à 400 °C
 $\dot{\epsilon}_0=0,1/s$

La comparaison avec des résultats montre que les simulations reproduisent bien les tests expérimentaux avec 1,43% d'erreur à 400 °C, 1,26 % d'erreur à 200 °C et 2,9% d'erreur à 25 °C.

Ainsi, les paramètres de Johnson-Cook étant déterminés et validés, on procède à d'autres tests de compression, avec l'échantillon à l'horizontale cette fois-ci (figure 3-13),

pour valider le modèle d'écoulement du matériau. En comparant les dimensions finales (figures 3-16 et 3-19), l'évolution de la température (figures 3-15 et 3-18) ainsi que courbes forces-déplacement (figures 3-14 et 3-17), on retrouve des résultats similaires avec très peu d'écart (par exemple la différence de température absolue entre le test réel et le test simulé ne dépasse pas 3 degrés dans le cas de 300 °C et 400 °C). Les échantillons utilisés pour les tests de compression latérale sont des cylindres (28,575 mm de diamètre par 44,45 mm de hauteur).

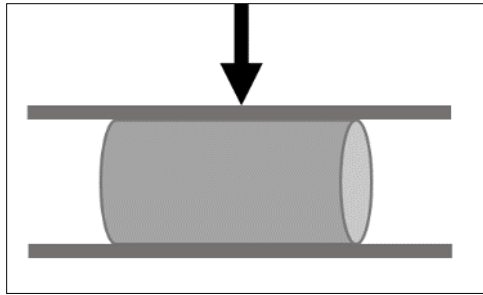


Figure 3- 13: Compression latérale : position des outils et de la pièce

À 400°C

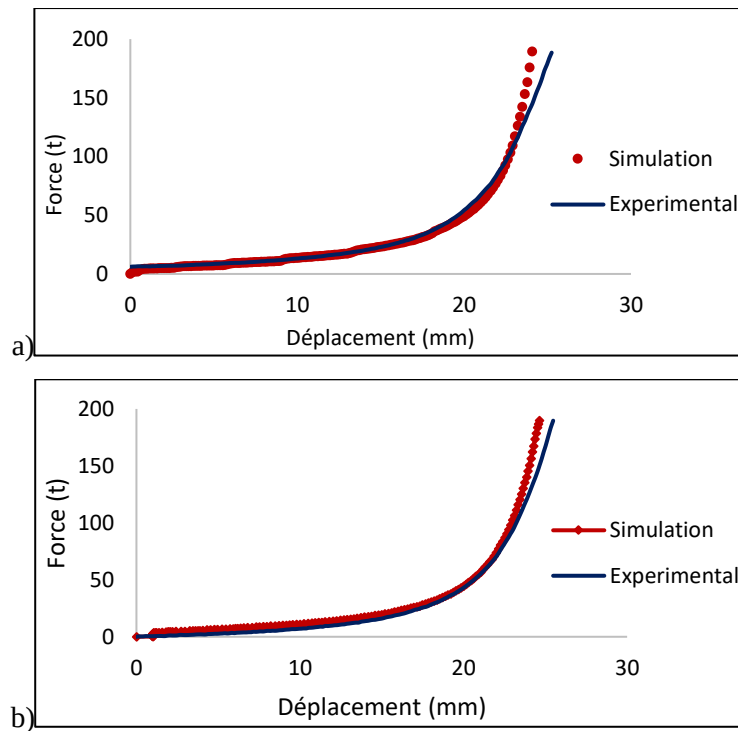


Figure 3- 14: Comparaison des courbes force-déplacement : a) résultat ÉF, b) résultat CEL

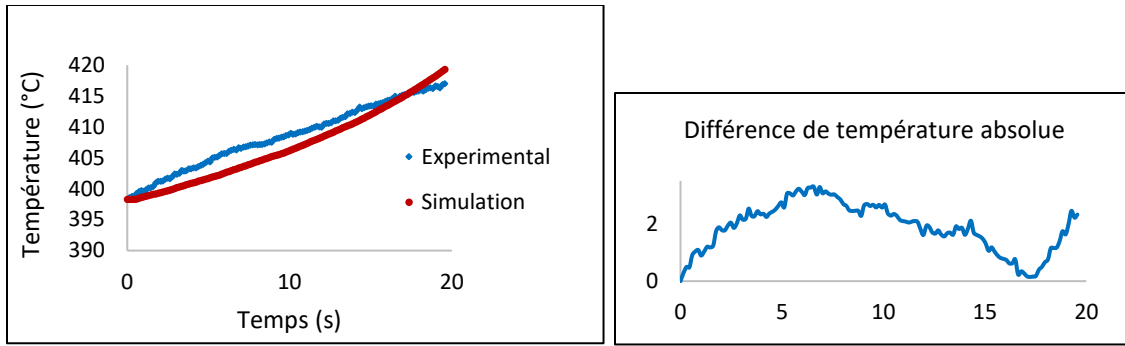


Figure 3- 15: Comparaison des courbes de température (gauche) et la différence de température (droite) à 400 °C

La figure 3-16 montre les résultats de simulation et de mesures expérimentales du test ; la simulation est faite en CEL (couplage eulérien lagrangien). Les détails de cette méthode sont expliqués à la section 3.5.1 b)).

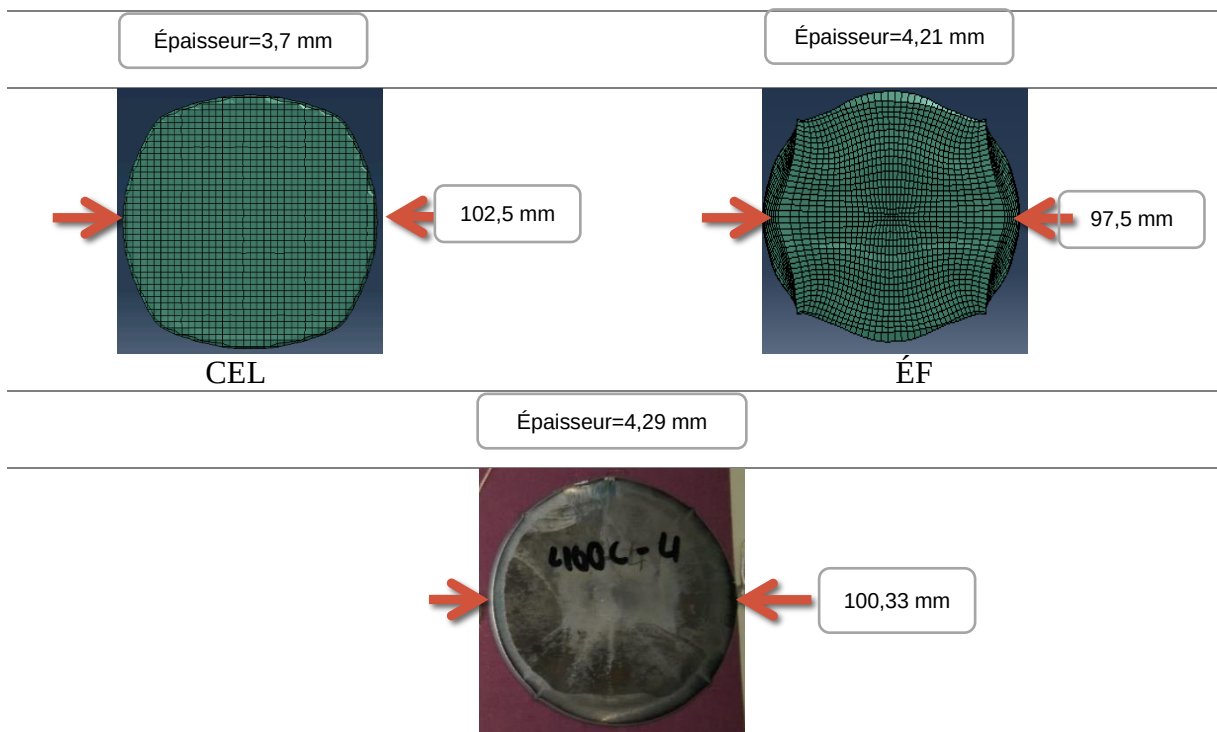


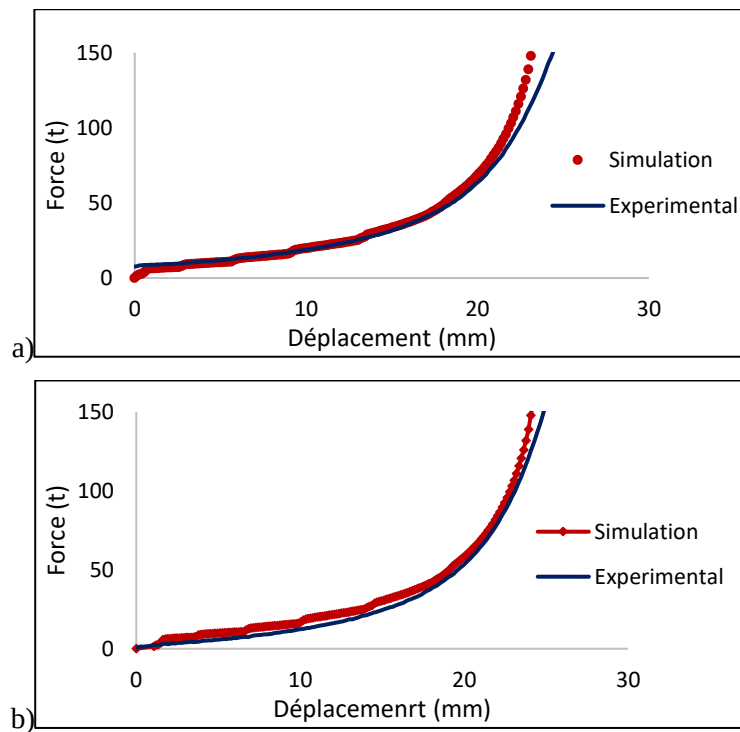
Figure 3- 16: Comparaison des dimensions après le test : simulation vs expérimental à 400 °C

Les simulations (figure 3-14) reproduisent bien la courbe force-déplacement mesurée lors de l'expérimental jusqu'à vers la fin du test où on remarque un certain

décalage (plus accentué en ÉF à cause de la distorsion du maillage qui entre en ligne de compte). Cela pourrait s'expliquer par l'asymétrie du matériau ou par l'effet de la recristallisation dynamique ou par l'effet du frottement qui change ou par l'effet combiné de ces différents points qui n'ont pas été prises en compte dans le modèle de comportement de Johnson-Cook. D'ailleurs, cela expliquerait également le fait que la forme de la pièce est légèrement différente en simulation. L'étude et la prise en compte de la recristallisation dynamique seront effectuées à la section 3.5.3, quant à l'asymétrie elle sera négligée dans notre étude. Pour ce qui du frottement, à partir des cas de simulations plus complexes qui seront effectués, nous déciderons si son influence est assez significative dans nos modèles (voir section 3.5.1b)).

Par ailleurs, la bonne concordance au niveau de l'évolution de la température entre le modèle simulé en CEL et le modèle expérimental démontre que la simulation reproduit assez bien la portion de travail mécanique traduite en chaleur, le coefficient de 0.9 de fraction de déformation plastique convertie en chaleur est donc valable ici.

À 300°C



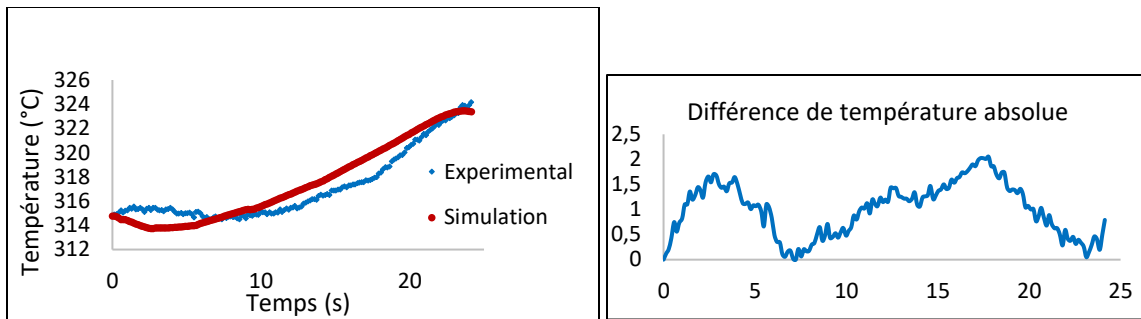


Figure 3- 18: Comparaison des courbes de température (gauche) et la différence de température (droite) à 300°C.

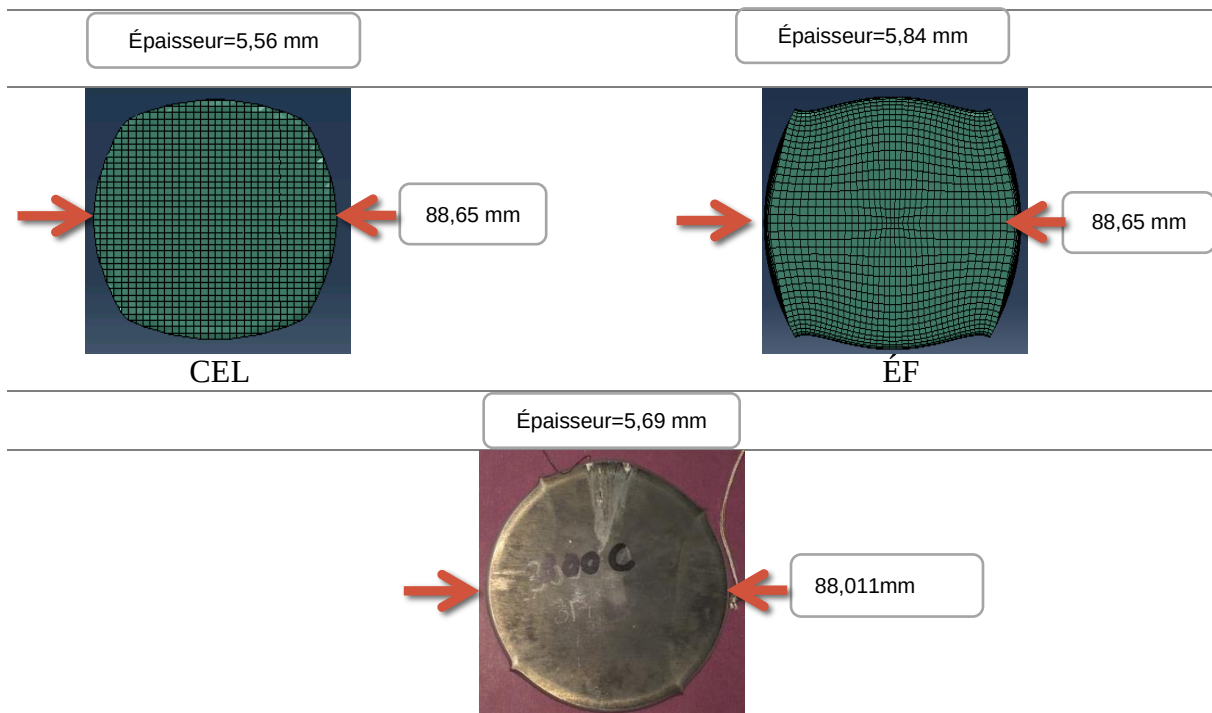


Figure 3- 19 : Comparaison des dimensions après le test : simulation vs expérimental à 300°C.

On tire les mêmes conclusions que pour le cas du test à 400°C. Par ailleurs, les figures 3-14 et 3-17 nous montrent que la méthode CEL est préférable, l'absence de distorsion conduit à un résultat plus précis. Les tests de compression axiale et latérale ainsi effectués ont permis de valider la précision des paramètres déterminés du modèle de Johnson-Cook. On peut alors procéder au forgeage de la pièce simple. Les contraintes à respecter étant la force maximale de la presse (230t) et des rapports de déformation respectant ceux de la pièce industrielle dans la mesure du possible (voir section 3.5.1).

3.5. Forgeage : Expérimental et simulation

Tel que mentionné au niveau de l'introduction de ce chapitre, l'étude numérique et pratique du procédé de forgeage est essentielle à la compréhension et à l'atteinte des objectifs de modélisation précise.

La composante industrielle est une pièce complexe et longue à simuler avec un maillage d'une bonne précision. Le développement d'une bonne méthodologie de forgeage et l'ensemble des études paramétriques seraient donc très longs à effectuer. De plus, n'avons pas tous les paramètres du procédé industriel. De ce fait, nous allons développer une pièce simple qui reproduit les caractéristiques d'intérêt de la composante industrielle à savoir le même profil d'écoulement du matériau, des niveaux de déformations semblables et quasiment les mêmes conditions de forgeage. Cette étude permettra d'avoir un ensemble d'informations (courbes de force-déplacement, température interne de la pièce lors du forgeage, contraintes d'écoulement lors du forgeage, etc.) nécessaire à la validation de la modélisation du procédé et d'étudier les différents aspects du forgeage autant au niveau de la simulation qu'à l'expérimental et de transférer notre méthodologie à la pièce industrielle. Nous obtenons ainsi un gain considérable au niveau des coûts de simulation et en termes de temps.

3.5.1. Forgeage de la pièce simple

La pièce simple a été choisie en accord avec les caractéristiques de la composante industrielle et les limites des équipements disponibles pour la forger. Elle se trouve être 5 à 6 fois plus petite que la composante industrielle (figure 3-20) et ses caractéristiques comparées à celles de la composante industrielle sont montrées à la figure 3-21 et au tableau 3-3.



Figure 3- 20 : Composante industrielle vs pièce simple

a) Simulation du forgeage : Comparaison des caractéristiques des deux pièces

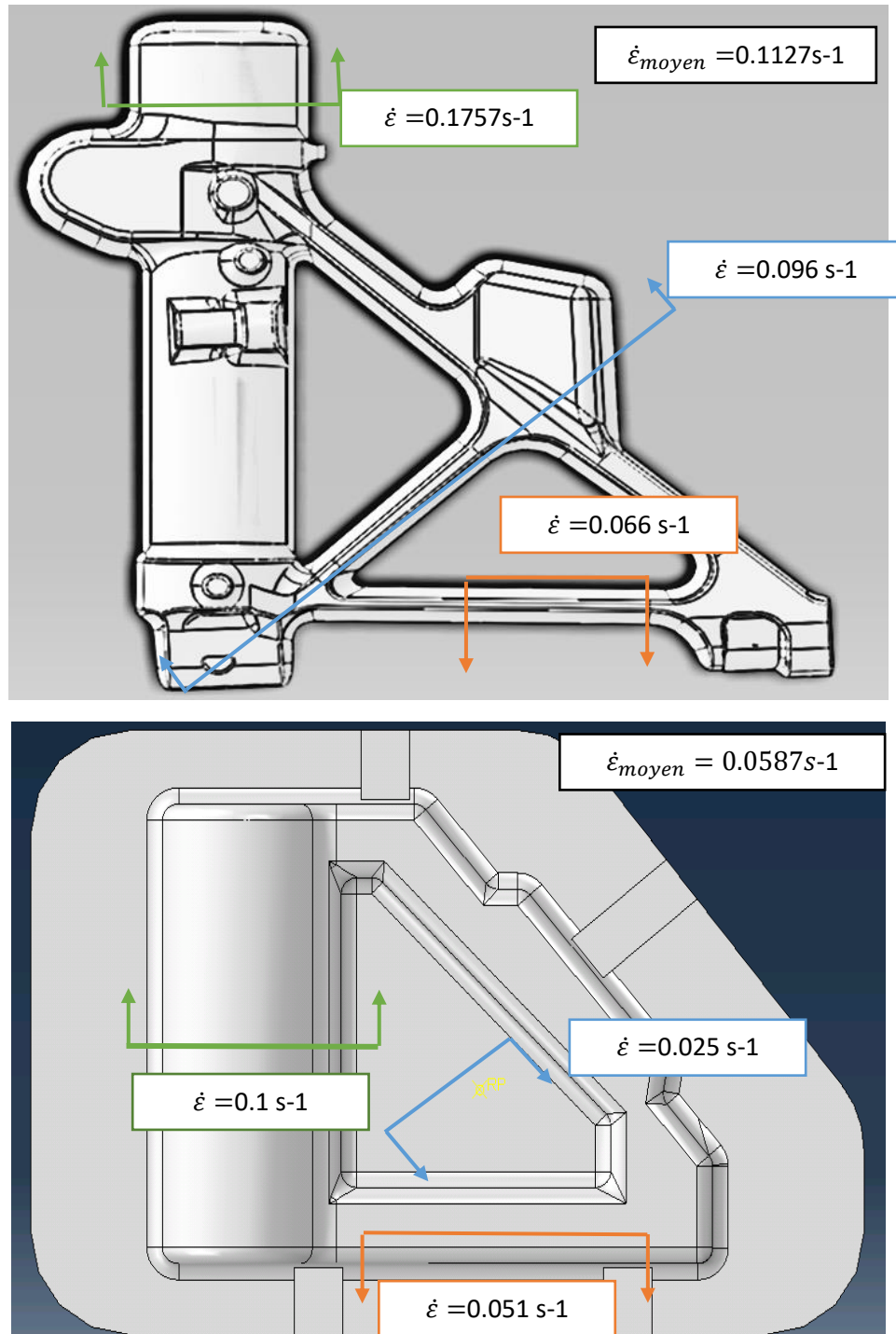
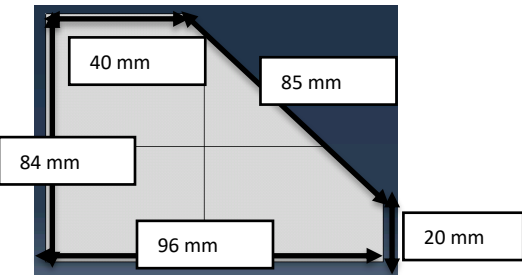
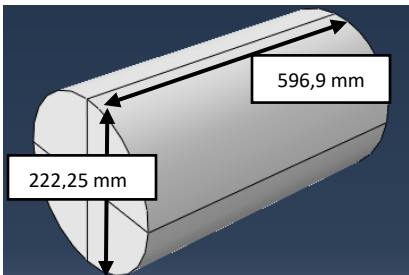
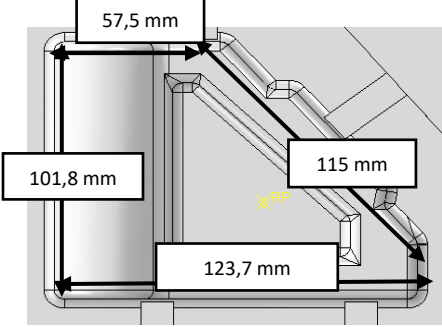
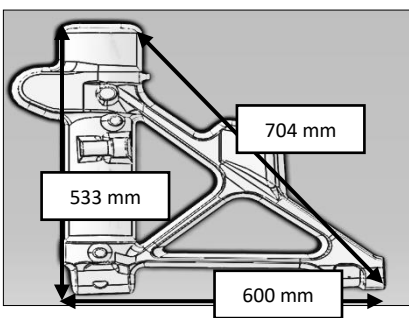


Figure 3- 21 : Localisation des niveaux de déformations composante industrielle vs pièce simple

Tel qu'on peut le voir à la figure 3-21, le design de la pièce simple a été pensé de manière à s'approcher le plus efficacement possible de la composante industrielle. Le fait d'avoir des niveaux de contraintes et déformation différents dans la pièce simple permet une bonne représentation de la diversité que l'on retrouve dans la composante industrielle et permettra ainsi de développer une bonne méthodologie d'analyse, notamment pour ce qui des contraintes résiduelles après forgeage.

Tableau 3 - 4 : Tableau comparatif entre la composante industrielle et la pièce simple

Conditions	Condition de forgeage et cinématique des outils pour la pièce simple	Condition de forgeage et cinématique des outils pour la composante HD
	Vitesse de forgeage : 0,5 mm/s Temps de forgeage : 22,8 s Nombre d'étapes de mise en forme : 1 Température initiale de la bielle et des outils : 400 °C Coefficient de frottement : 0,1 Matériau de la bielle : AA7175 Matériau des outils : rigide Épaisseur : 35 mm	Vitesse de forgeage : 12,7 mm/s Temps de forgeage : 21,38 s Nombre d'étapes de mise en forme : 2 (préforgeage et forgeage de finition) Température initiale de la bielle : 400°C Température initiale des outils : 382 °C Coefficient de frottement : 0,1 Matériau de la bielle : AA7175 Matériau des outils : rigide
Forme initiale de la pièce		
Forme obtenue après forgeage		

Ci-dessus, on présente la pièce à forger et la préforme. Autant le design de la préforme que celui de la pièce ont été déterminés suite à un travail d'itération afin de respecter la contrainte de la presse (force maximale de 230 tonnes). Un cas de préforme cylindrique a été étudié, la force nécessaire pour effectuer le forgeage étant supérieure à la limite de la presse, nous avons opté pour un cas de préforme trapézoïdale (voir figure 3-22). Quant à la pièce à forger (figure 3-23), les critères de design sont, outre la limite de la presse, les caractéristiques représentatives de la composante industrielle que nous avons déjà évoquées.

Le forgeage se fait à une vitesse de 0,5mm/s.

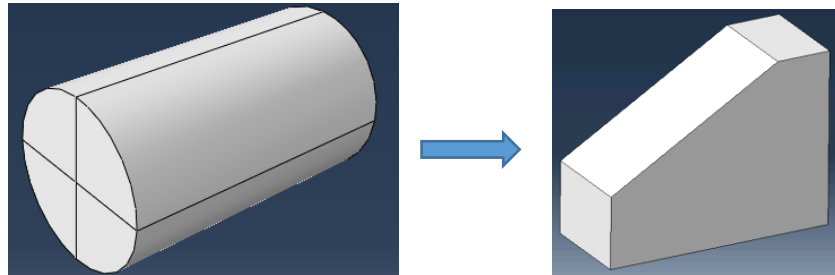


Figure 3- 22 : Évolution du design de la préforme

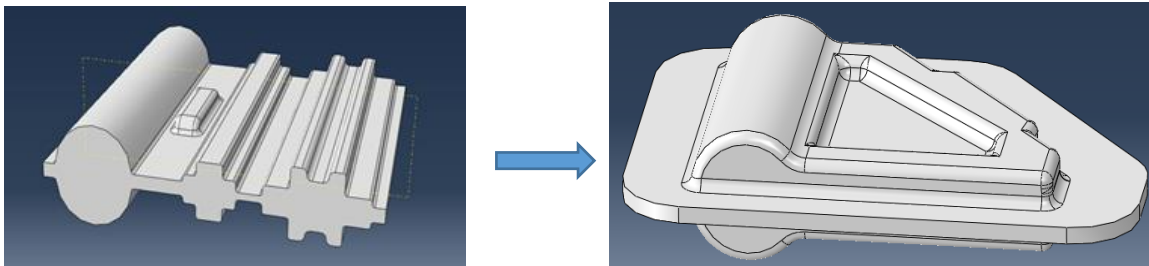


Figure 3- 23 : Évolution du design de la pièce à forger

Comme nous l'avons déjà expliqué, la composante de train d'atterrissage à l'étude se caractérise par sa complexité. Sa simulation par la méthode des éléments finis requiert une attention particulière au niveau du maillage pour contourner les problèmes de distorsions. Nous effectuerons donc nos simulations avec la méthode CEL (couplage Eulérien Lagrangien (figure 3-24). La figure 3-24 a) montre l'opération de fractionnement de la méthode CEL et les figures 3-25 et 3-26 montrent le positionnement de la préforme dans les matrices avant le début de la mise en forme.

Rappel : Dans la méthode CEL, la description eulérienne permet aux éléments finis d’être fixés dans l’espace et le matériau peut s’écouler à travers ses éléments (la matière se déplace à l’intérieur du maillage). Par ailleurs, les structures sont discrétisées avec une formulation éléments finis de type Lagrange. Les forces agissantes sont transférées à la structure lagrangienne à travers le contact en eulérien-lagrangien basé sur l’algorithme de contact pénalité. L’avantage d’utiliser cette technique est qu’elle permet de résoudre les problèmes de distorsion de maillage rencontrés lors de la simulation de la mise en forme, le maillage est fixe et la matière s’écoule à travers, il n’y a pas besoin de remaillage. En effet, avec la méthode CEL, le maillage est assuré par un volume de contrôle qui assigne à la pièce son propre maillage. Cependant, un maillage assez fin est requis pour simuler de petites épaisseurs, ce qui rend les coûts plus importants en termes de temps et d’espace de calcul. Les éléments Abaqus utilisés sont des éléments EC3D8RT (élément eulérien couplé thermiquement à 8 nœuds).

Se reporter au chapitre 1 pour la formulation du couplage eulérien-lagrangien en termes d’équation de conservations.

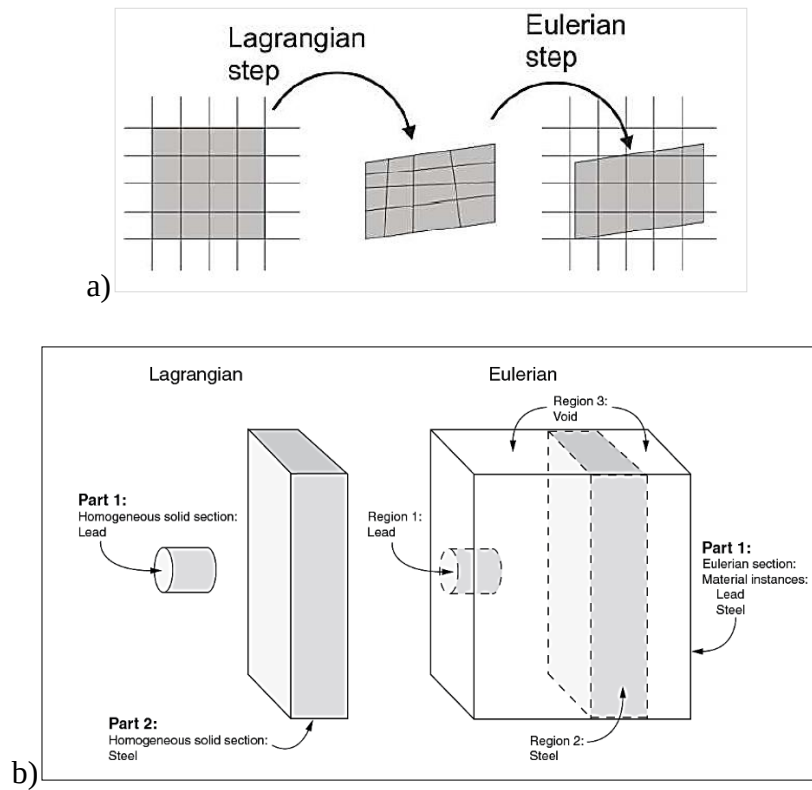


Figure 3- 24 : Couplage eulérien-lagrangien (a) [S4], b) documentation d’Abaqus)

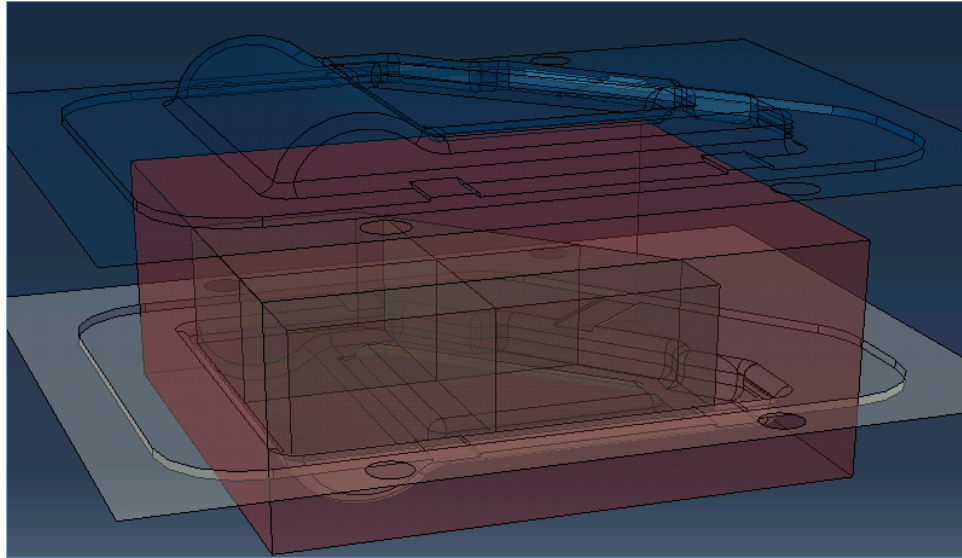


Figure 3- 25 : Assemblage matrices préforme et volume de contrôle dans Abaqus

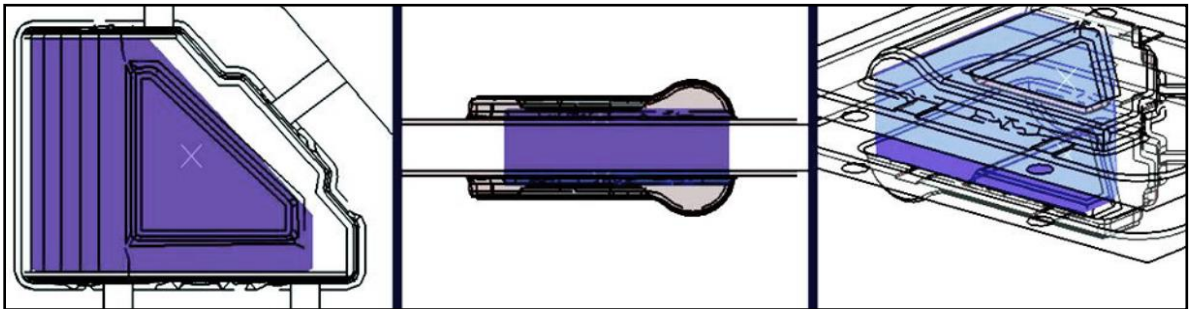


Figure 3- 26 : Simulation du forgeage : différentes vues d'avant la mise en forme

b) Comparaison des résultats de simulation et des résultats expérimentaux

Le forgeage expérimental reproduit les mêmes étapes que la simulation. On peut voir à la figure 3-27 les différentes étapes de forgeage.



Figure 3- 27 : Forgeage de la pièce réelle

Afin de s'assurer que la simulation (après retour élastique) reproduit bien l'écoulement du matériau durant la mise en forme, on compare les résultats à différentes étapes de forgeage. Les formes évolutives de la pièce (figure 3-28) et les courbes force-déplacement (figure 3-29) sont comparées.

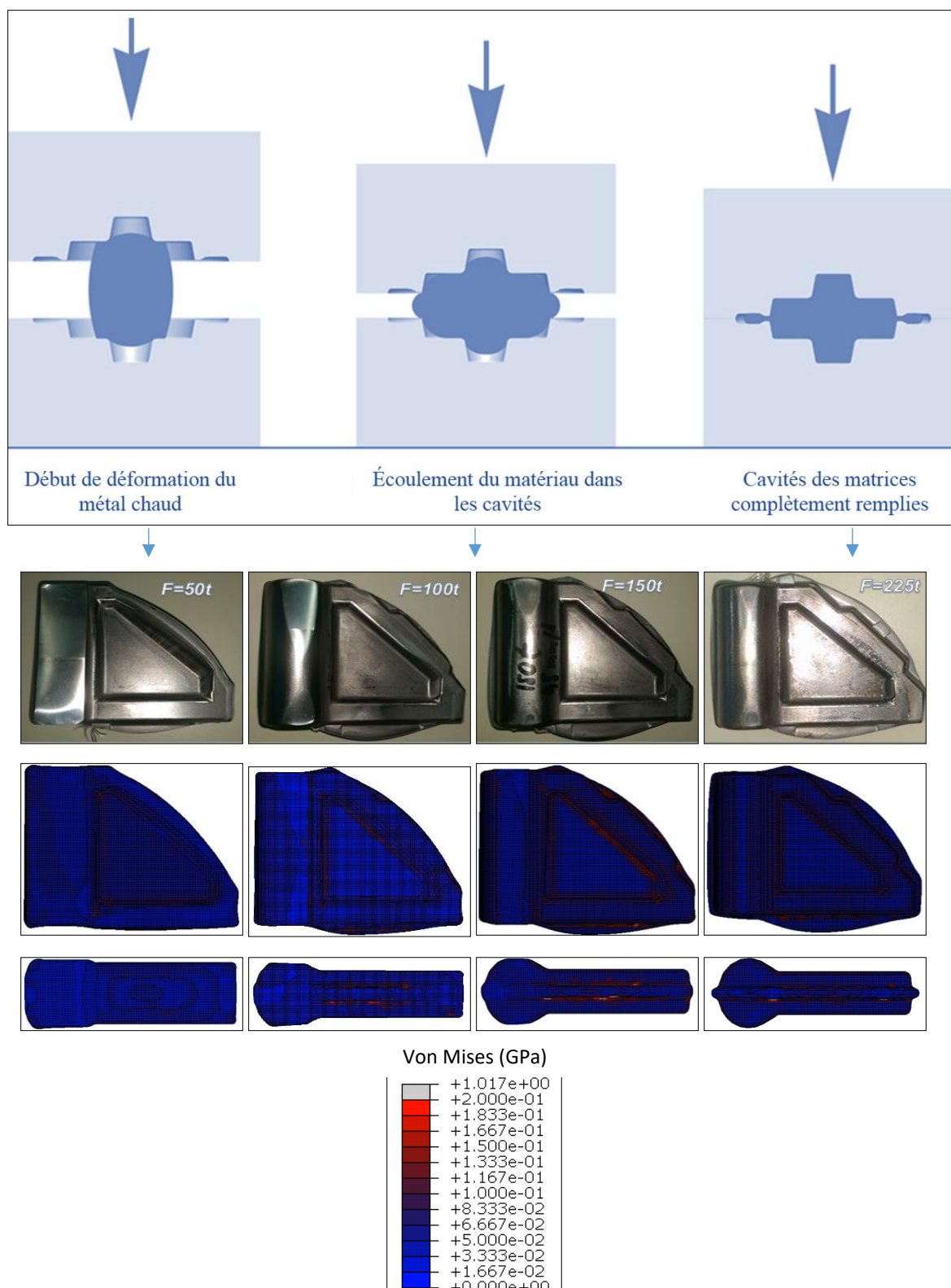
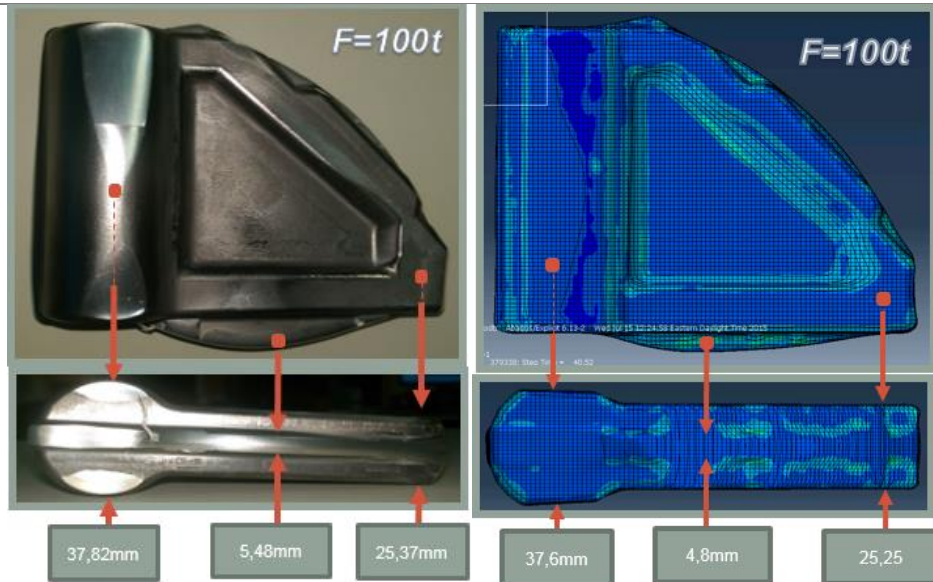
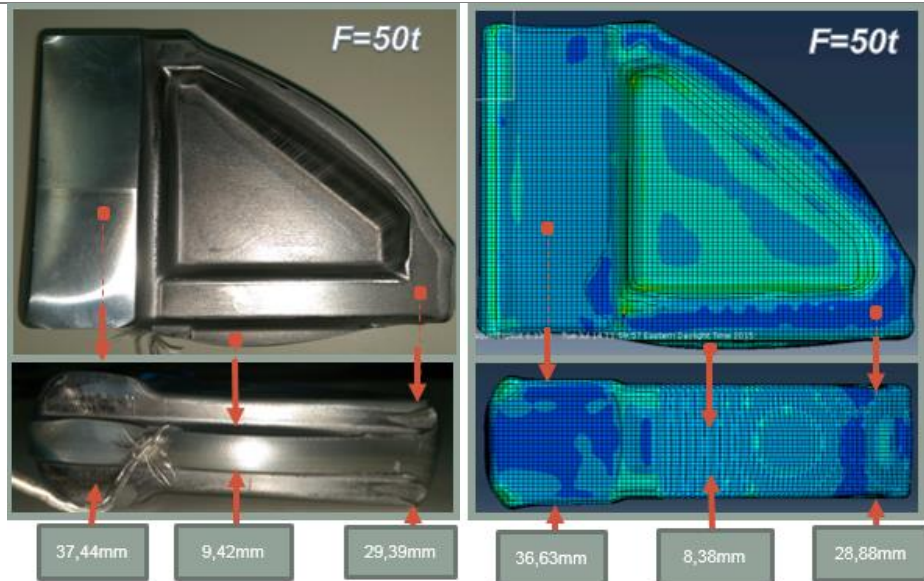
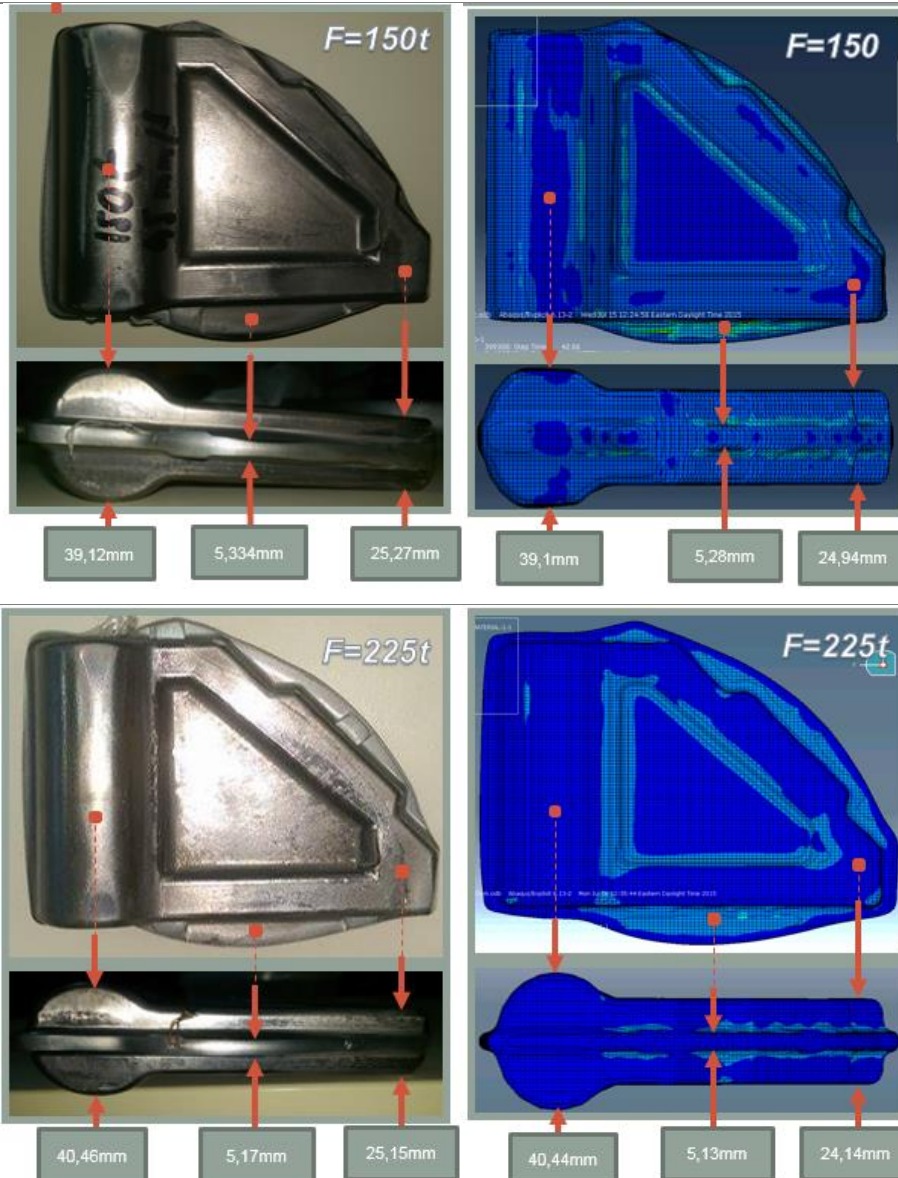


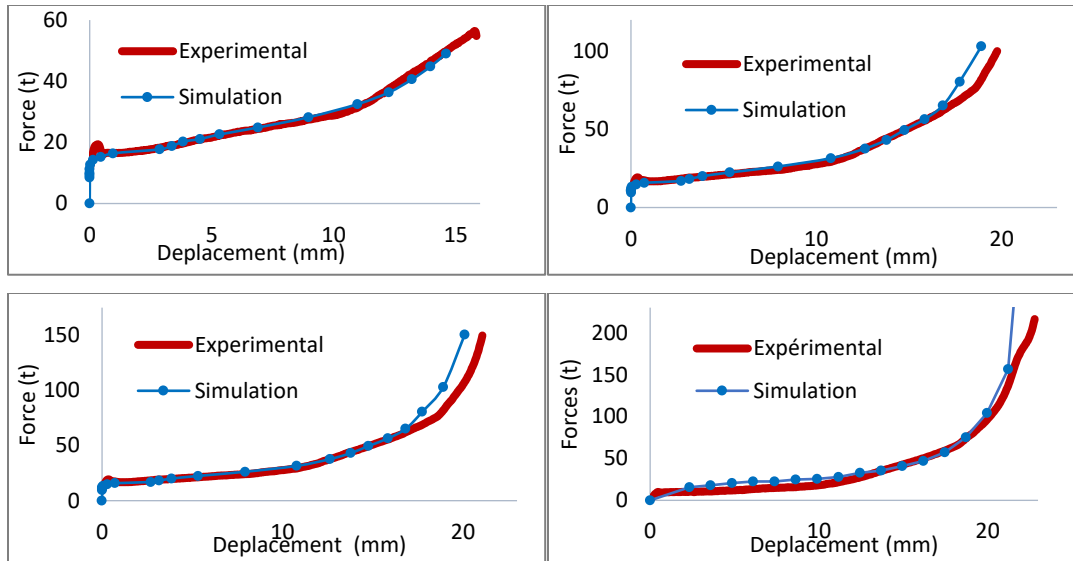
Figure 3- 28 : Comparaison de la simulation du forgeage avec le forgeage réel à différentes étapes



a)



b)



c)

Figure 3- 29 : a) et b) Comparaison des dimensions de la pièce forgée par simulation avec celles de la pièce forgée expérimentalement c) Comparaison des forces appliquées pendant le forgeage avec celles obtenues par simulation à 50 t, 100 t, 150 t et 225 t.

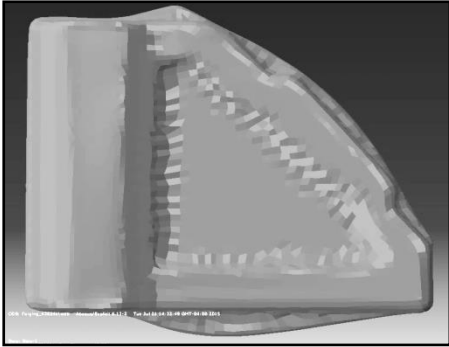
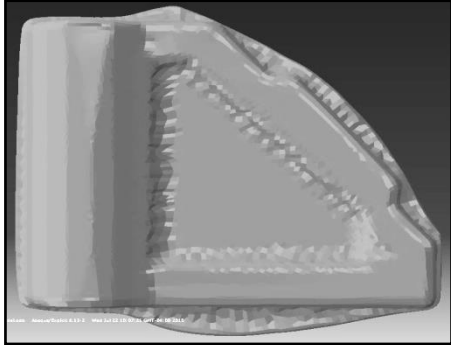
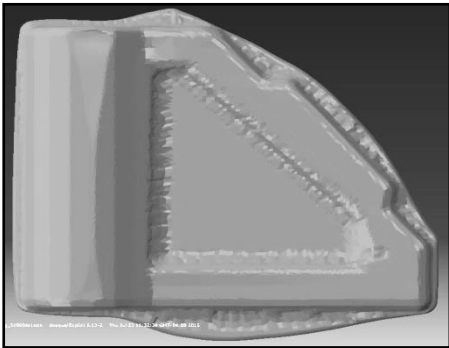
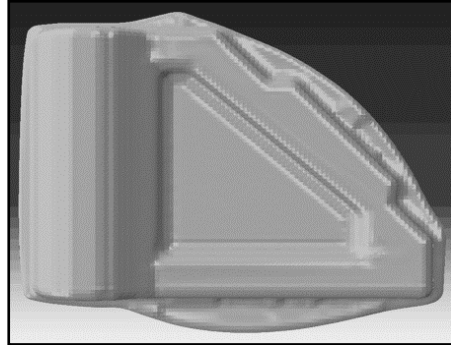
La reproductivité des résultats des courbes de force en fonction du déplacement et des dimensions de la pièce après forgeage (figure 3-29), et de la forme de la pièce à chaque étape de forgeage (la simulation reproduit bien l'écoulement du matériau) (figure 3-28) montrent que la méthode de simulation (CEL), le modèle de forgeage ainsi que la loi utilisée (Johnson-Cook) sont adéquats [B8]. Ces résultats viennent appuyer les conclusions tirées des tests de compressions axiale et latérale. On retrouve également un faible écart entre la force simulée et la force expérimentale des courbes de force-déplacement. Toutefois, cet écart étant faible (moins de 5 % d'erreur), le coefficient de frottement utilisé et constant à 0.1 est conservé. Seule l'étude poussée de l'effet de la recristallisation dynamique sur l'écoulement du matériau sera faite (voir section 3.5.3.1).

Mais avant, dans la prochaine section, on s'intéresse à l'efficacité de notre méthode de simulation face à la méthode classique des éléments finis.

c) Comparaison de la méthode eulérienne avec la méthode lagrangienne

Le but de cette comparaison est de vérifier l'avantage de l'utilisation de la méthode CEL par rapport à une méthode lagrangienne dans le cas de la simulation du forgeage de la pièce simple. Pour ce faire, une comparaison du temps de calcul, et de la précision des résultats est effectuée (tableau 3-4 et figure 3-30). Les mêmes conditions de forgeage et de simulations (conditions limites et chargement) sont utilisées dans les différents cas de figure.

Tableau 3 - 5 : Tableau comparatif des résultats de simulation selon le type et le nombre d'éléments (a), b) et c) Lagrangien, d) CEL)

Nombre d'éléments : 44194 Type : C3D6RT, C3D8RT Temps de calcul : 4h20mn, 6 processeurs  (a)	Nombre d'éléments : 152540 Type : C3D6RT, C3D8RT Temps de calcul : 17h, 6 processeurs  (b)
Nombre d'éléments : 519904 Type : C3D6RT, C3D8RT Temps de calcul : 107h, 6 processeurs  (c)	Volume de contrôle : 587727 Nombre d'éléments : 152297 Type : EC3D8RT Temps de calcul : 40h30mn, 6 processeurs  (d)

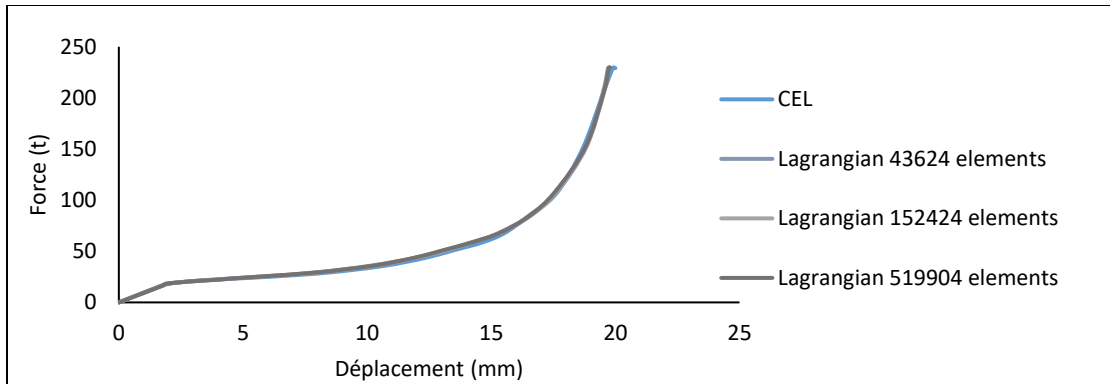


Figure 3- 30 : Comparaison des courbes de force déplacement pour les simulations : méthode élément fini Lagrangienne versus méthode CEL dans Abaqus

La comparaison des résultats de simulation en lagrangien versus la simulation en CEL montre que la méthode CEL est préférentielle dans le cas présent. Pour un nombre d'éléments et un temps de calcul comparables, la pièce simulée en CEL donne un meilleur résultat et cela même dans le cas où le nombre d'éléments en lagrangien est 3.4 fois plus élevé. Ces résultats confirment les avantages cités pour la méthode CEL. Elle donne de bons résultats en présence de grandes déformations sans que ne surviennent des problèmes de distorsion comme on peut l'observer sur les 3 modèles simulés en lagrangien.

La prochaine section porte sur le refroidissement de la pièce, l'étape juste après le forgeage afin de procéder par la suite à l'étude des états des contraintes résiduelles.

3.5.2. Refroidissement

L'étude du refroidissement de la pièce a pour but de vérifier si outre les contraintes résiduelles de forgeage, il y aurait des contraintes induites par la présence d'un quelconque gradient thermique dans la pièce lors du refroidissement après forgeage.

Le refroidissement de la pièce forgée se fait à l'air libre, on considère donc les modes de transfert par conduction et par convection naturelle et forcée due à la forte

ventilation dans le local où les tests sont effectués. La pièce après forgeage est déposée sur le tablier en acier à température ambiante.

La conduction se caractérise par un transfert thermique entre les solides en contact ; ce transfert se produisant des zones les plus chaudes (pièce) vers les zones les plus froides (tablier). En supposant que le tablier a une température constante (T_{initiale}), le transfert répond à la loi de Fourier qui s'écrit :

$$\vec{q} \cdot \vec{n} = -k \nabla T \cdot \vec{n} = h_{\text{contact}} (T - T_{\text{outil}}) \quad (3.21)$$

où k est le coefficient de conduction thermique du matériau et h_{contact} est le coefficient de transfert thermique par contact entre les deux matériaux.

La convection se caractérise par un échange thermique entre la pièce et l'air ambiant dont la température est supposée constante.

$$\vec{q} \cdot \vec{n} = h_{\text{convection}} (T - T_{\text{air}}) \quad (3.22)$$

Un thermocouple se trouvant à mi-hauteur et à une profondeur de 35 mm (figure 3-31) dans la pièce avant forgeage permet une lecture de la température de la pièce durant le refroidissement (figure 3-32).

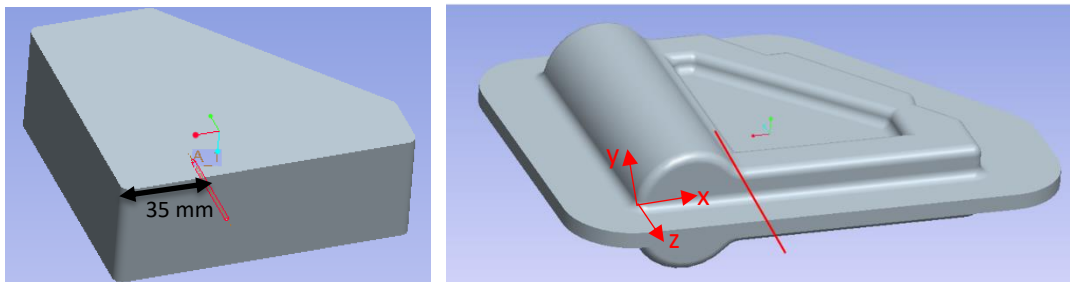


Figure 3- 31 : Position du thermocouple (en rouge) avant et après forgeage

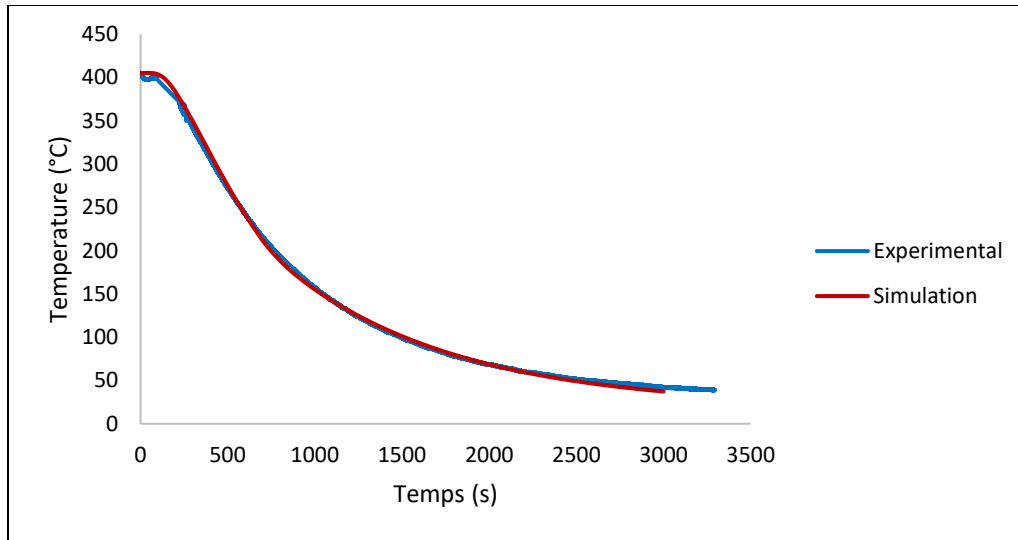


Figure 3- 32 : Courbe de refroidissement de la pièce après forgeage

Par la suite, afin de vérifier la présence ou non d'un gradient thermique lors du refroidissement, on chauffe une pièce à 400 °C et on suit l'évolution de sa température à différents endroits durant le refroidissement en utilisant des thermocouples (figure 3-33).

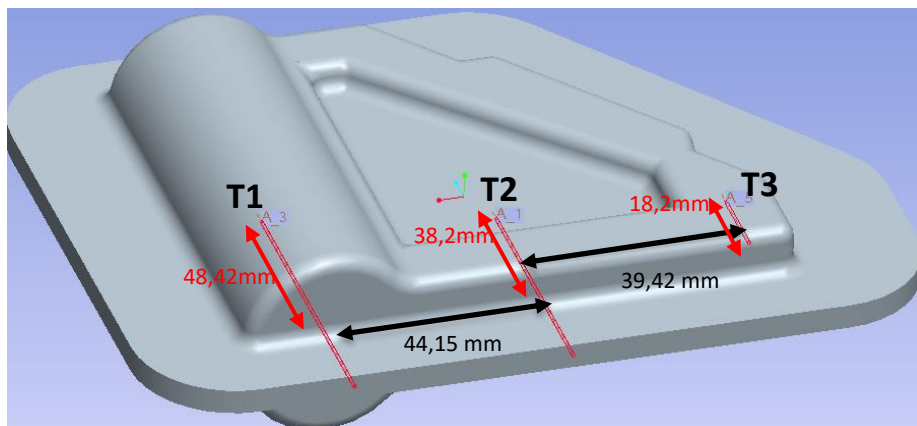


Figure 3- 33 : Position des thermocouples sur la pièce

Le thermocouple 1 (T1) se trouve à une profondeur de 48,42 mm sans tenir compte des bavures et à 20,3 mm de la surface (figure 3-33), le thermocouple 2 (T2) se trouve à une profondeur de 38,2 mm sans tenir compte des bavures et à 7,1 mm de la surface le

thermocouple 3 (T3) se trouve à une profondeur de 18,2 mm sans tenir compte des bavures et à 2 mm de la surface.

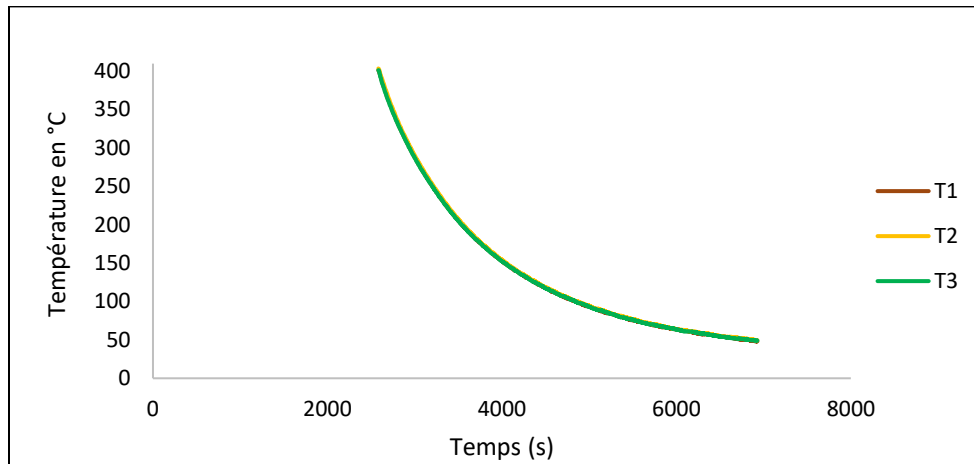


Figure 3- 34 : Courbes d'évolution de la température à différentes zones de la pièce lors du refroidissement

La pièce étant très petite et l'aluminium étant un bon conducteur, les courbes d'évolution de la température durant le refroidissement sont superposées (figure 3-34), ce qui nous amène à la conclusion suivante : du fait de l'absence de gradient thermique durant le refroidissement, il n'y a pas de nouvelles contraintes induites durant le refroidissement.

Les simulations présentées jusqu'ici sont faites avec la loi de Johnson-Cook standard. Les résultats obtenus corroborent bien les tests expérimentaux effectués. Mais toutefois, à certains niveaux, on remarque des imprécisions (Johnson-Cook étant un modèle phénoménologique) qui peuvent être corrigées avec la loi de Johnson-Cook modifiée plus complète en ce sens qu'elle inclut les effets de la recristallisation dynamique et par le fait même conduit à une meilleure reproductivité du comportement matériau et donc des résultats de forgeage.

Ainsi, dans la prochaine section, les paramètres nécessaires à la mise en œuvre de ce modèle seront déterminés. La pièce simple sera à nouveau étudiée afin de mettre en avant la précision du modèle de Johnson-Cook modifié.

3.5.3. Identification des paramètres de Johnson-Cook modifié et simulation de la pièce simple

La loi de Johnson-Cook est de base une loi macroscopique, ce qui se traduit par le fait que le modèle ne tient pas compte du fait que les matériaux comportent des textures aux échelles mésoscopiques intermédiaires qui peuvent influencer considérablement certaines propriétés, tout particulièrement sur leurs caractéristiques de résistance mécanique [C8]. Le fait de considérer que la matière est continue (théorie de la mécanique des milieux continus), bien que permettant de comprendre le comportement du matériau de manière globale lorsqu'il est soumis à des sollicitations, ne permet pas de capter de manière précise le vrai comportement inhérent aux hétérogénéités du matériau. En effet, différentes interactions et transformations ont lieu au niveau microscopique et sont à la base du comportement du matériau. Ces paramètres sont divers et leur effet les uns sur les autres est important à comprendre.

À défaut d'une loi de physique ou micromécanique qui serait en mesure de prendre en compte et d'intégrer plusieurs paramètres de la microstructure (recristallisation dynamique, transformation de phase, taille, orientation et évolution des grains, etc.), on utilisera une loi de Johnson-Cook qui inclut la recristallisation dynamique. Ce nouveau modèle permet ainsi de traduire au niveau macroscopique l'effet d'un phénomène microscopique sur les contraintes mécaniques.

Pour la mise en œuvre, les paramètres de Johnson-Cook restent inchangés. Seuls les nouveaux paramètres rattachés à la fonction $H(T)$ sont à déterminer.

Tout d'abord, conformément à la figure 1-9 présentée au chapitre 1 montrant l'effet de la recristallisation dynamique sur la contrainte d'écoulement du matériau, les courbes contraintes-déformation à 400 °C (figure 3-35) nous montrent l'effet de la recristallisation dynamique sur la loi d'écoulement.

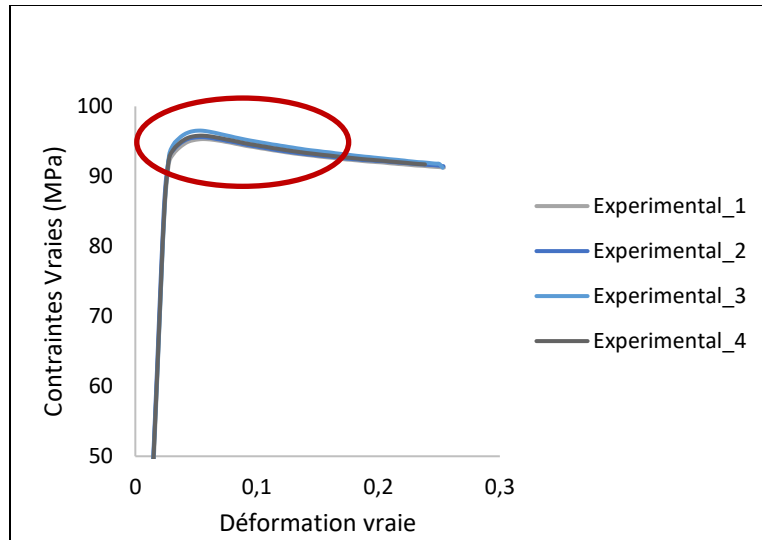


Figure 3- 35 : Observation de la recrystallisation à 400 °C à $\dot{\epsilon}_0=0,133/s$

Ainsi, pour confirmer la présence de recrystallisation dynamique d'un point de vue microstructural, on observe la microstructure des échantillons après compression (figures 3-37 et 3-38). La figure 3-36 montre une illustration de l'aspect de la microstructure en présence de recrystallisation dynamique.

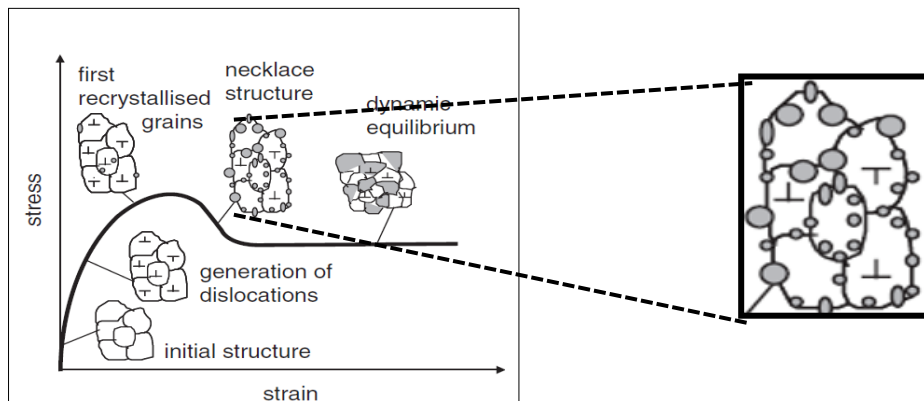


Figure 3- 36 : Structure en collier : recrystallisation dynamique [V3]

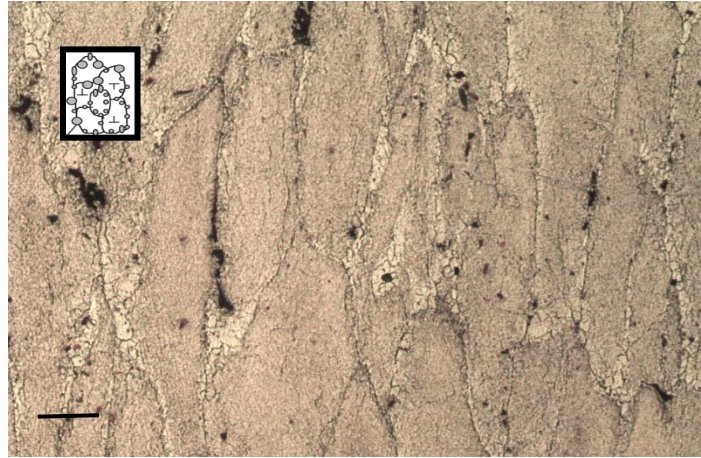


Figure 3- 37 : Métallographie à 300°C : observation du début de formation de la structure en collier caractéristique de la recristallisation dynamique (Échelle=200 microns).

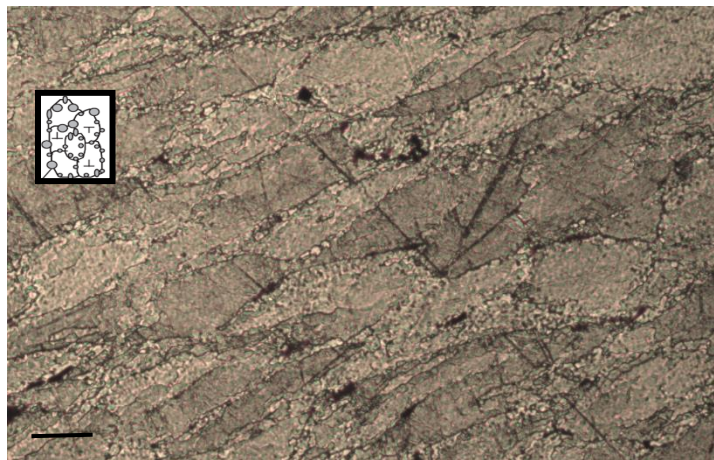


Figure 3- 38 : Métallographie à 400°C : observation de la structure en collier caractéristique de la recristallisation dynamique (Échelle=200 microns).

Les métallographies d'échantillons après compression latérale à 300°C et 400°C pour une vitesse de déformation de 2,54 mm/s (figures 3-37 et 3-38) illustrent la structure en collier le long des joints de grains représentative de la recristallisation.

Comme le phénomène est confirmé, nous allons maintenant procéder à sa caractérisation. Afin de déterminer la température de recristallisation ainsi que les contraintes avant et après recristallisation, nous avons effectué différents tests de compression (à différentes températures et taux de déformation ; chaque test est répété deux fois et une valeur moyenne est considérée). Les mesures de contraintes en fonction

de la déformation permettent de trouver nos paramètres selon le patron de la figure 3-39 qui montrent l'évolution de la contrainte en fonction de la température en présence du phénomène de recristallisation dynamique.

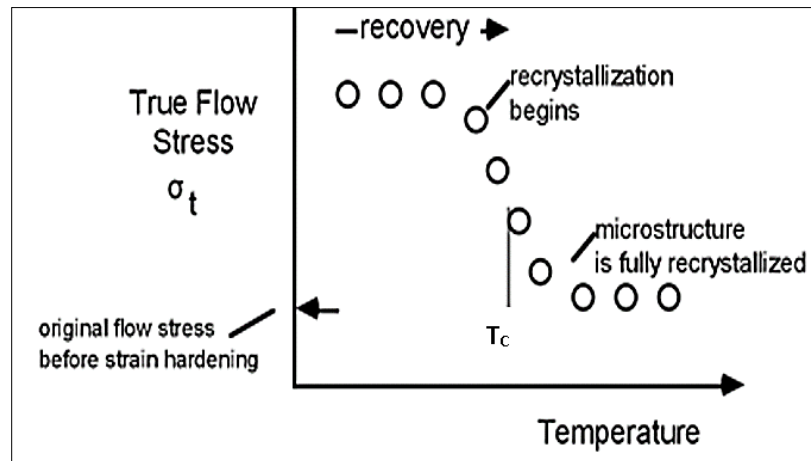


Figure 3- 39 : Température de recristallisation en fonction de l'évolution des contraintes

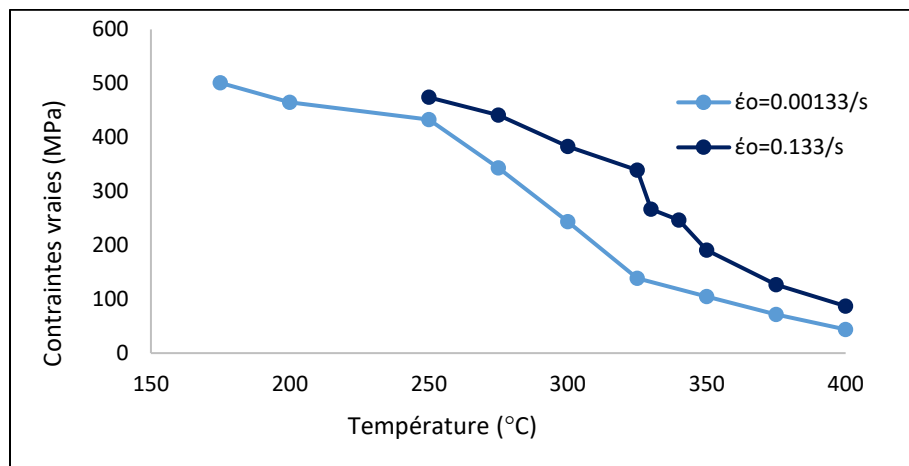


Figure 3- 40 : Évolution des contraintes à 20% de déformation plastique en fonction de la température à différents taux de déformation

Pour la vitesse de déformation de 2,54mm/s ($\dot{\epsilon}_0 = 0,133/s$) et à 20 % de déformation plastique vraie, la courbe de contrainte-température de la figure 3-40 permet de déterminer la température $T_c = 327^\circ C$ ainsi que les contraintes $\sigma_{ydef} = 333,24 \text{ MPa}$ et $\sigma_{yrec} = 258,72 \text{ MPa}$. Autour de $327^\circ C$, on peut observer l'effet de l'initiation de la recristallisation par la chute des contraintes.

Cependant, pour une faible vitesse de déformation correspondant à 0,0254mm/s ($\dot{\epsilon}_0=0,133/s$), il est plus difficile de situer explicitement la température minimale à laquelle la recristallisation se produit (figure 3-40). Cela peut être dû à la nature même de la recristallisation.

En effet, selon des études faites pour des alliages Al-Zn-Mg-Cu (série 7000) [S6, Y1], à faible vitesse de déformation, (0,001/s à 0,01/s) la recristallisation dynamique peut être de nature continue, précédée d'un recouvrement dynamique. Lorsque la vitesse de déformation augmente, l'absence de recouvrement dynamique fournit assez d'énergie stockée pour que la recristallisation dynamique soit discontinue. On rappelle que dans le cas de la recristallisation discontinue, les cristallites sont de véritables nouveaux grains, disposés en collier aux joints de grain (cas des figures 3-37 et 3-38, ce qui confirme la recristallisation dynamique discontinue) alors que dans le cas de la recristallisation continue, on note dans l'ensemble du matériau la présence de nouveaux grains contenant une structure relativement équiaxe de sous-grains [S8].

Par ailleurs, en comparant les courbes obtenues à 0,001/s et 0,1/s (figure 3-41 b)) à des courbes de la littérature [D8, G7] illustrant la recristallisation dynamique et le recouvrement dynamique (figure 3-41 a)), on retrouve un comportement similaire. Ainsi, bien qu'on ne soit pas en mesure de déterminer explicitement le type de recristallisation (continue ou discontinue) à 0,001/s, on peut confirmer la présence de recouvrement dynamique.

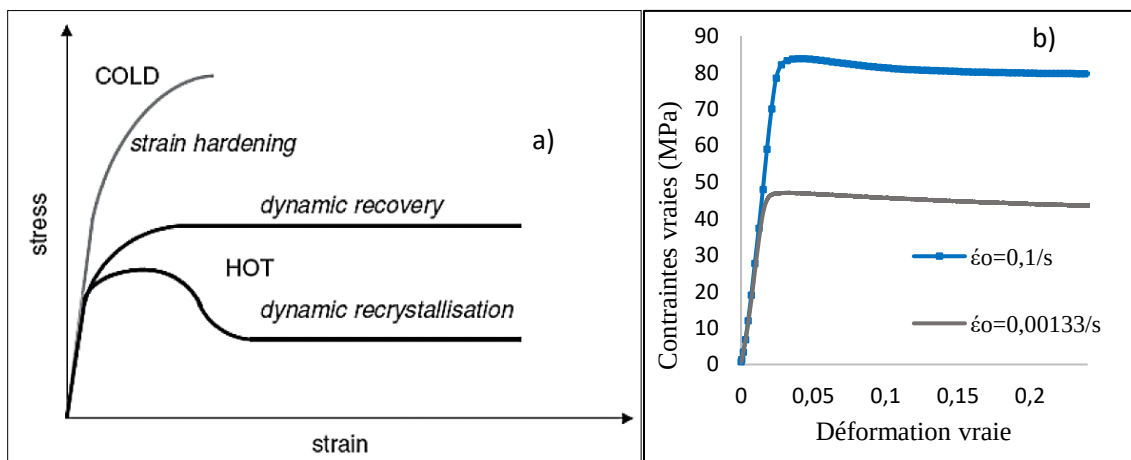


Figure 3- 41 : a) Courbes d'écoulement typique durant le travail à froid et à chaud [G7],
b) Courbes d'écoulement à 0,001/s versus 0,1/s pour l'alliage 7175 à 400°C

Une investigation plus approfondie serait intéressante à ce niveau pour le cas de notre alliage à l'étude (AA7175), notamment une analyse de la microstructure d'échantillons testés à des vitesses faibles de l'ordre de 0,0254mm/s. Toutefois, dans le présent travail on se limitera à l'étude relative à la vitesse de déformation de 2,54 mm/s ($\dot{\epsilon}_0=0,133/s$).

Une fois les paramètres relatifs à la recristallisation dynamique déterminés, le modèle de Johnson-Cook modifié a été écrit sous forme de VUMAT afin de pouvoir l'utiliser dans Abaqus. Ci-dessous on peut voir les résultats obtenus.

➤ Comparaison des résultats expérimentaux avec ceux de Johnson-Cook classique et de Johnson-Cook modifié pour un test de compression uniaxial à 400°C

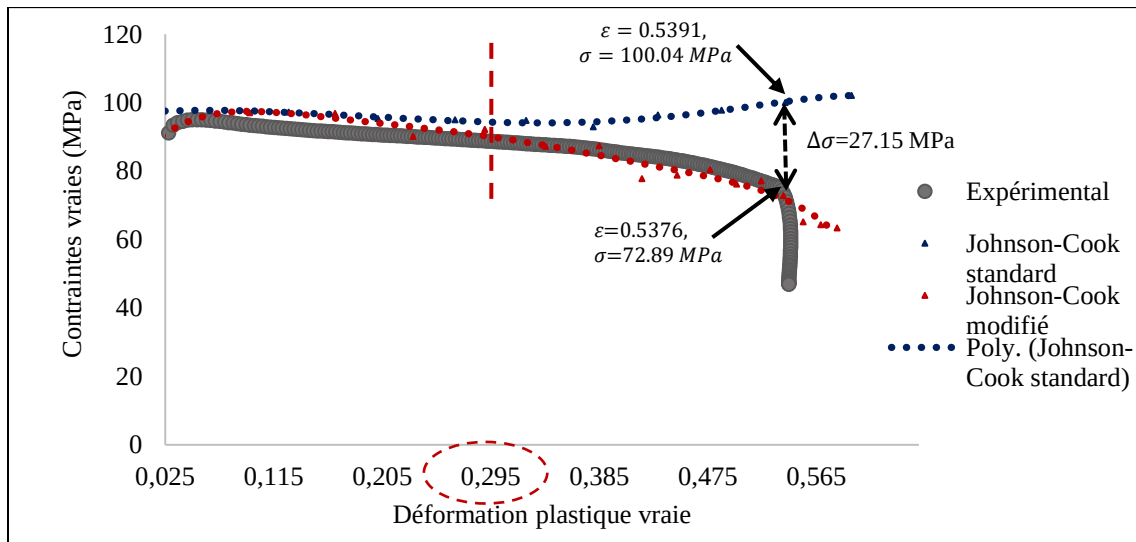


Figure 3- 42 : Comparaison des contraintes de Johnson-Cook classique et modifié avec l'expérimental : Test de compression à 400 °C

Tel qu'observé par Andrade et al. [A1], on retrouve au niveau des courbes simulées avec le modèle de Johnson-Cook modifié l'effet d'adoucissement des contraintes dû à la recristallisation dynamique (figure 3-42). Ce processus d'adoucissement se caractérise par la germination et la croissance de nouveaux grains au cours de la déformation (figure 3-36). L'écoulement du matériau conduit donc à l'établissement d'un régime stationnaire. À partir de 30% de déformation environ, le modèle de Johnson-Cook modifié est plus précis

que celui de Johnson-Cook standard qui lui n'inclut pas l'effet d'adoucissement induit par la recristallisation dynamique. Ainsi, on est à même de conclure que le modèle de Johnson-Cook modifié est plus adapté pour notre étude [B9].

3.5.3.1 Simulation de la pièce simple avec le modèle de Johnson-Cook modifié

Nous allons étudier le cas de la pièce simple qui subit des déformations de l'ordre de 150% à certains endroits (figure 3-44). La comparaison des niveaux de contraintes de Von Mises et l'étude de la métallographie nous montrent que l'adoucissement des contraintes avec le modèle de Johnson-Cook modifié est significatif (jusqu'à ~ 30%) (voir figures 3-42 et 3-43). Les figures 3-45 (a, b, c et d) montrent les états microstructuraux à différents endroits sur la pièce forgée.

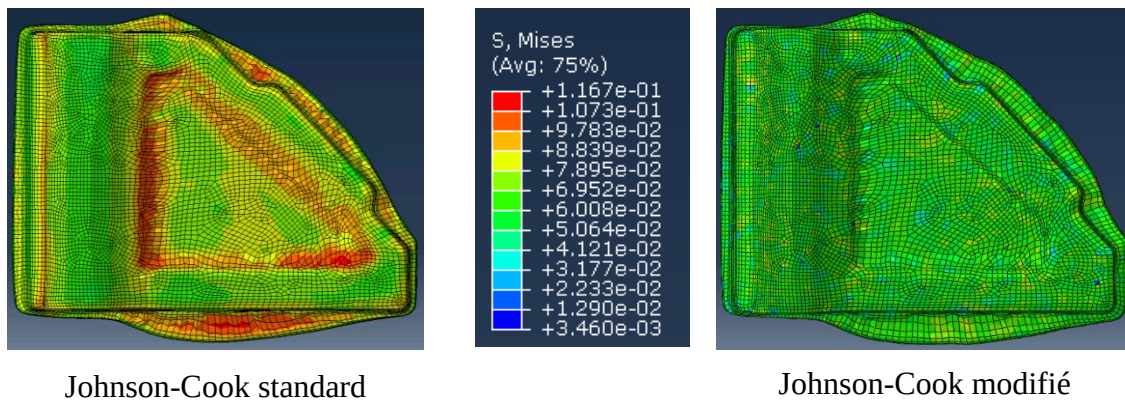


Figure 3- 43 : Comparaison de la simulation de la pièce simple avec Johnson-Cook standard et Johnson-Cook modifié

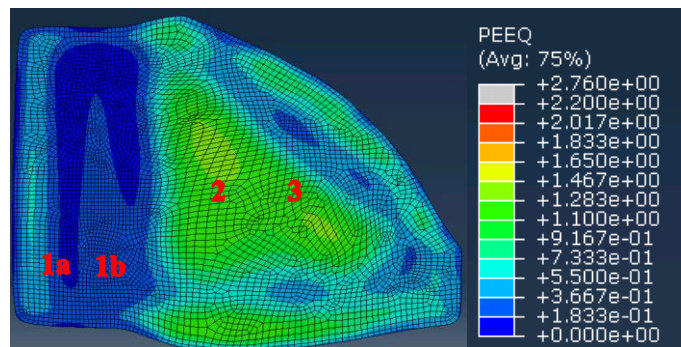
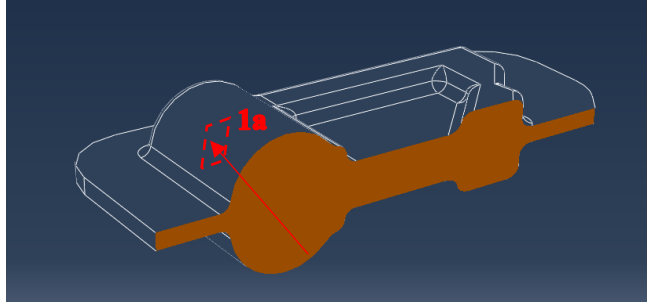
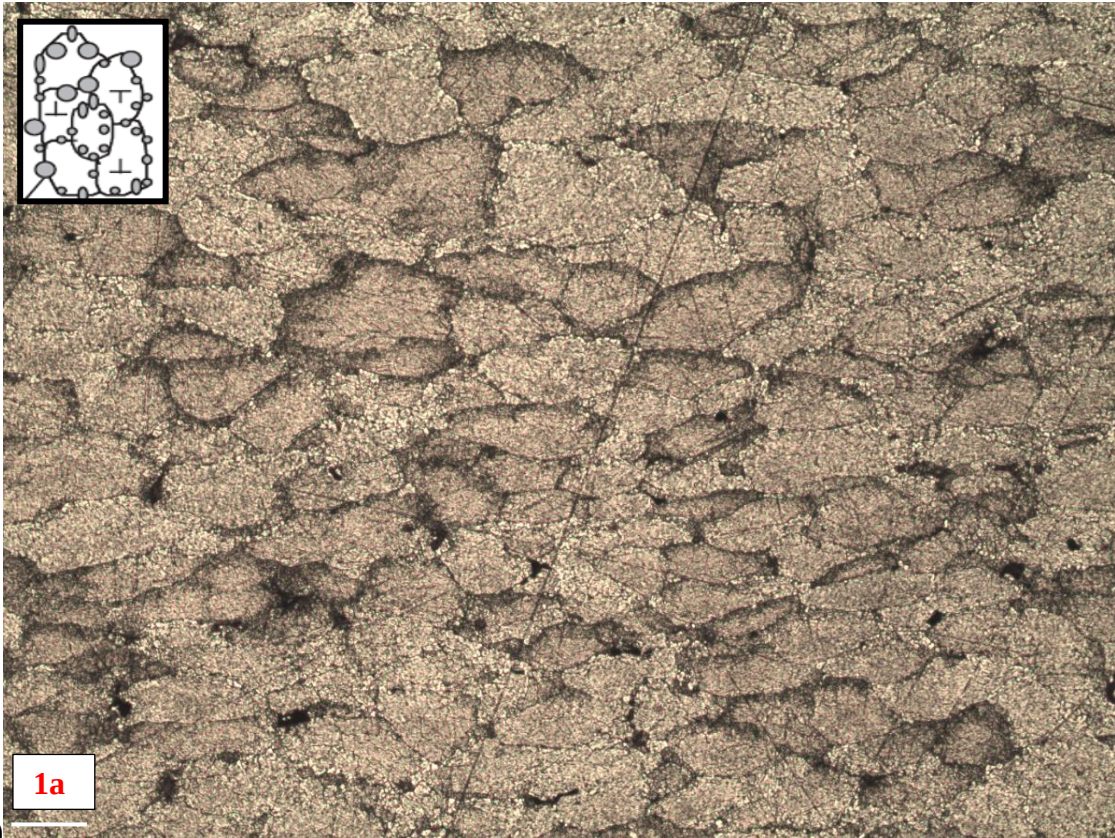


Figure 3- 44 : Emplacement des métallographies par rapport à la déformation plastique

a)

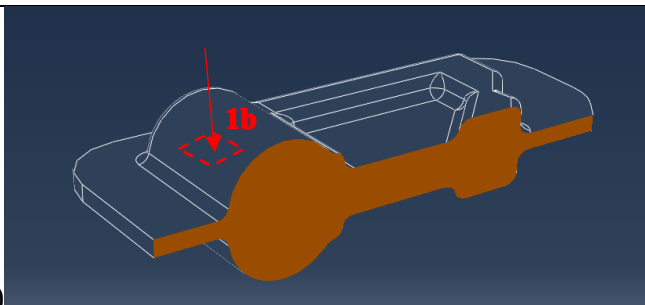


L'échantillon 1a se trouve sur le cylindre au niveau de l'axe central de la pièce proche du bout. La face observée est celle parallèle à la coupe.

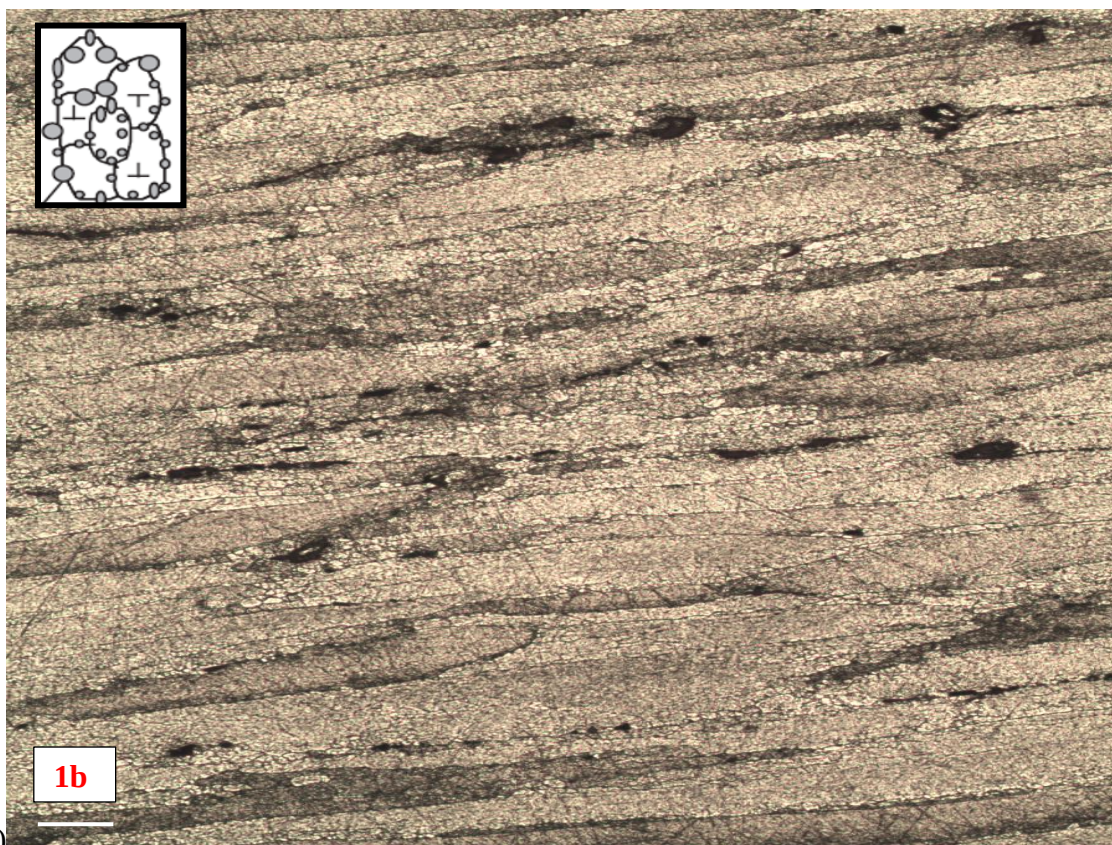


a)

b)

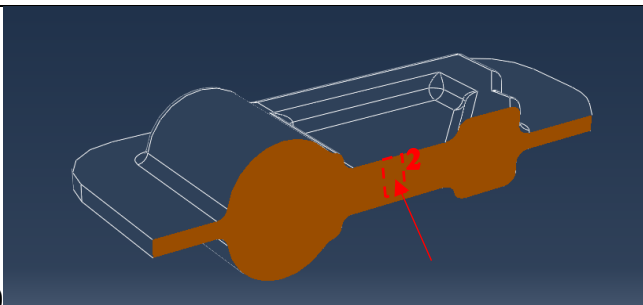


L'échantillon 1b se trouve sur le cylindre au niveau de l'axe central de la pièce proche du bout. La face observée est celle perpendiculaire à la coupe.

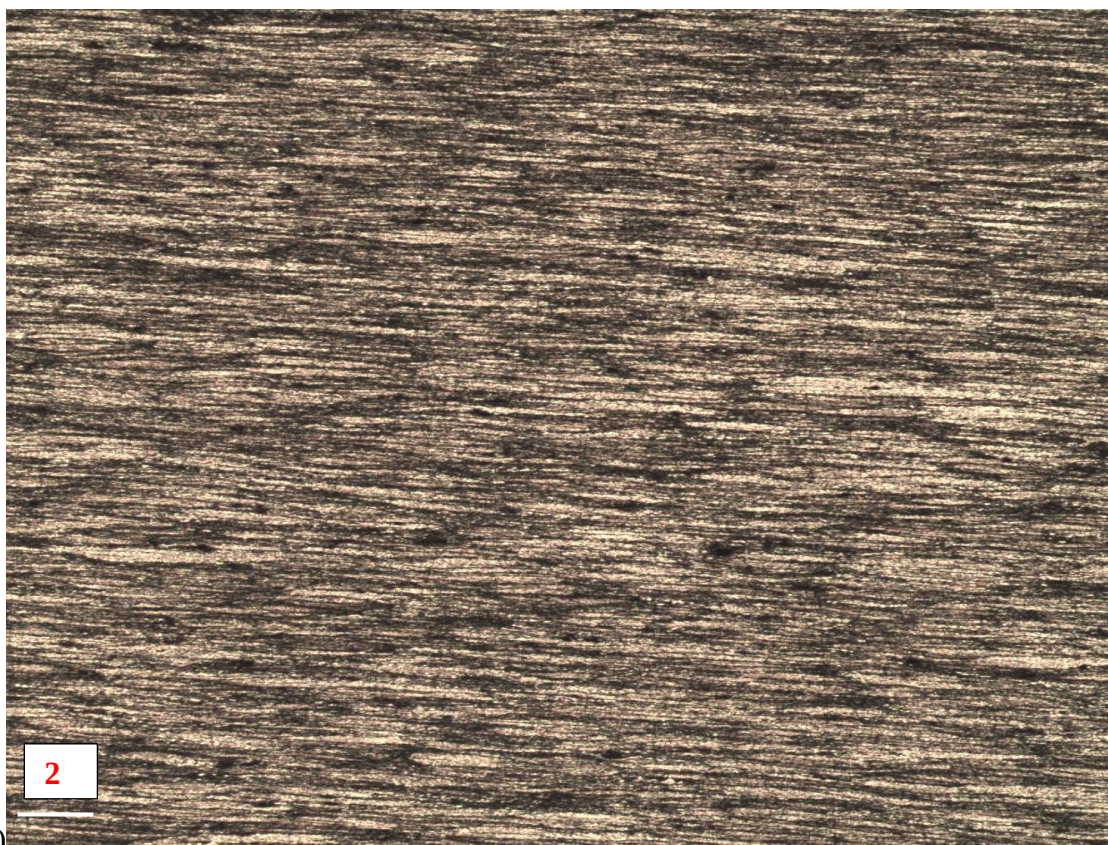


b)

c)



L'échantillon 2 se trouve sur la section mince du côté opposé au cylindre et proche du centre. La face observée est celle parallèle à la coupe.



c)

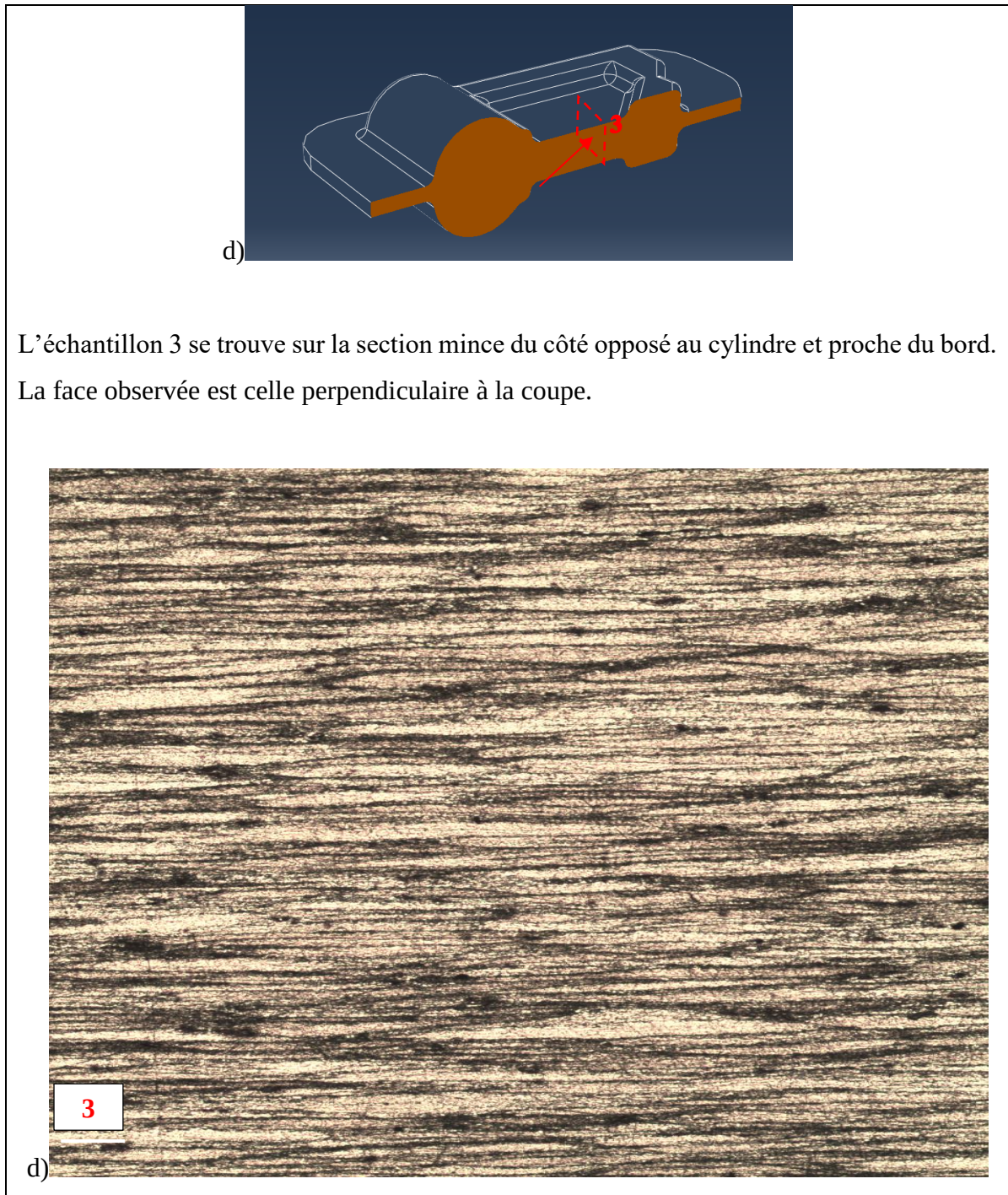


Figure 3- 45 : Observation de la recristallisation dynamique à différents endroits (a), b), c) et d)) sur la pièce forgée (Échelle=100 microns)

Les micrographies 1a et 1b montrent la présence de recristallisation, on distingue la germination de nouveaux agrégats autour des joints de grain. Cependant, les images (contraste entre grains, joints de grains et agrégats) ne sont pas assez claires. Nous sommes limités par l'équipement à notre disponibilité. En ce qui concerne les échantillons 2 et 3 situés sur la zone la plus déformée de la pièce, il est difficile de distinguer s'il y a formation d'agrégats autour des joints de grains. Les grains sont très allongés et fins.

Dans la prochaine section, la déformation des grains en fonction de la déformation plastique nous édifiera davantage à ce sujet.

3.5.3.2 Forme des grains et niveau de déformation

Afin de suivre l'évolution des grains en fonction de la déformation, on compare les micrographies du bloc de matériau qui a servi à faire la préforme aux micrographies de la pièce forgée à différents endroits correspondants à différents niveaux de déformation.

La figure 3-46 montre les directions d'allongement des grains selon les zones d'observation des micrographies initiales et selon les zones d'observations sur la pièce forgée.

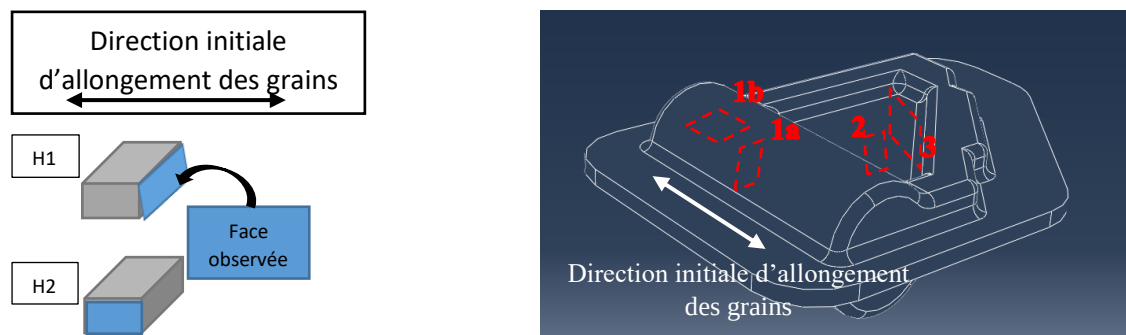


Figure 3- 46 : Zone d'observation des micrographies pour comparaison de l'évolution des grains

H1 dans la même direction d'observation que 1a et 2, H2 dans la même direction d'observation que 1b et 3.

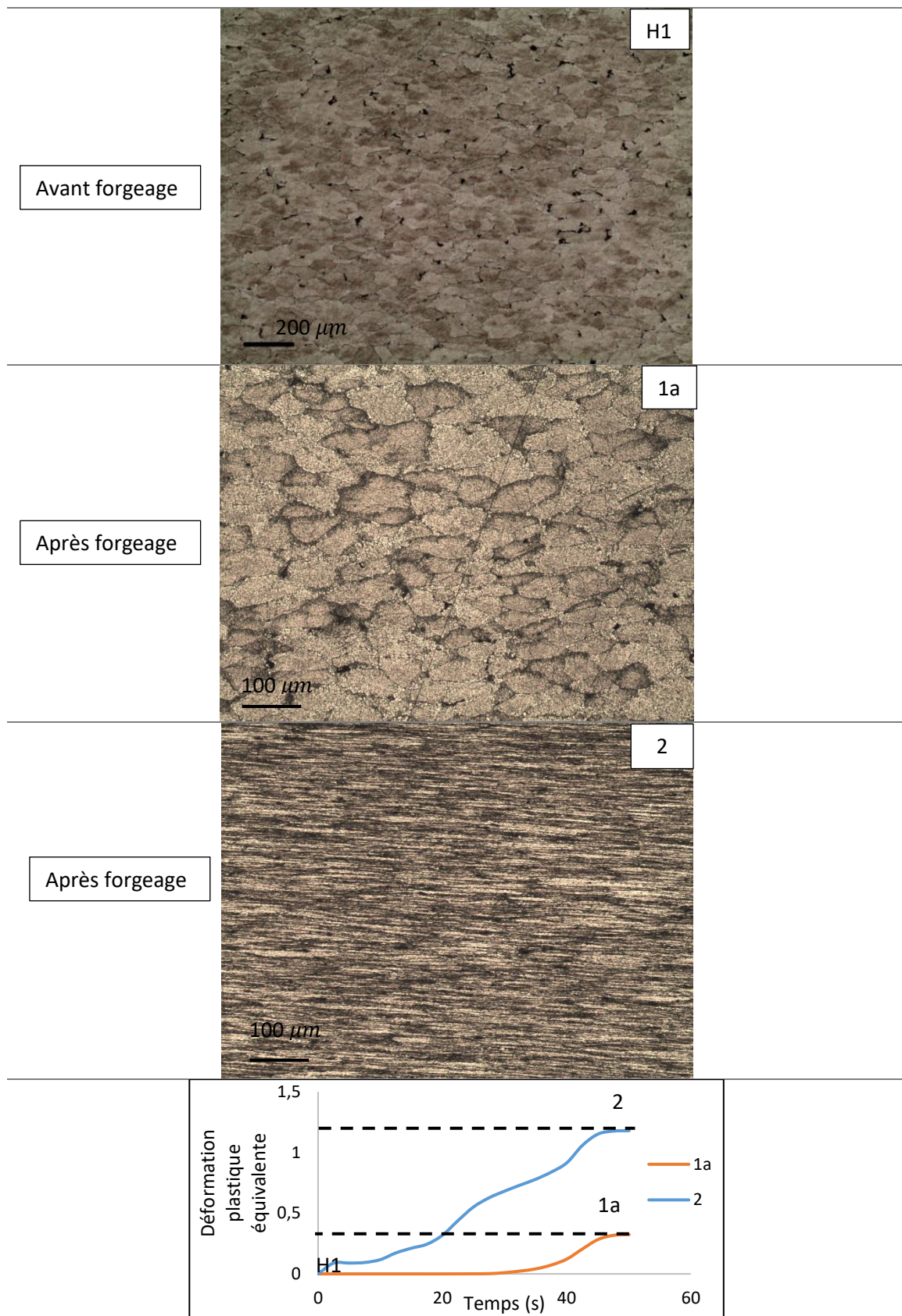


Figure 3- 47 : Microstructure avant et après forgeage vs déformation (échantillons 1a et 2)

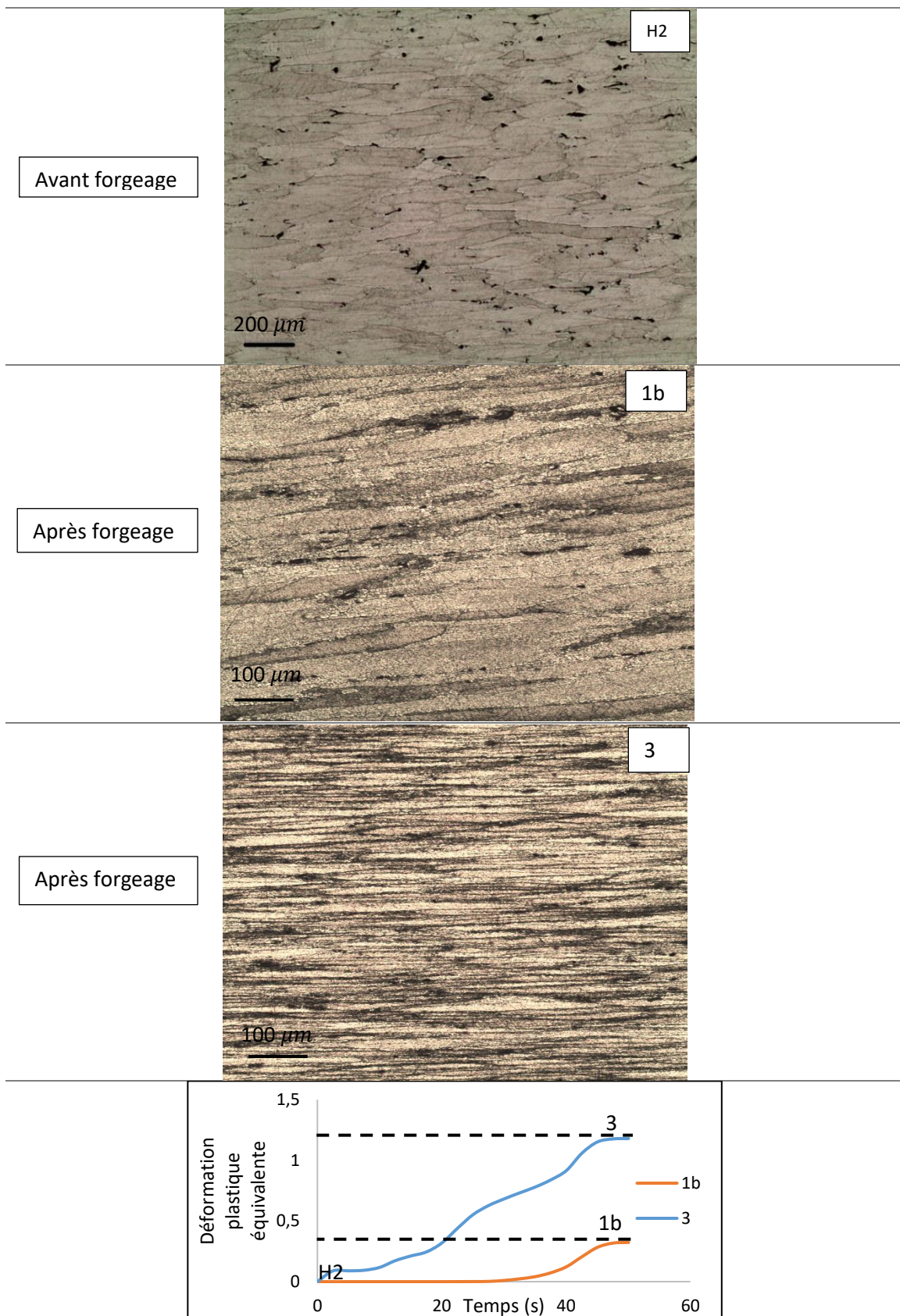


Figure 3- 48 : Microstructure avant et après forgeage vs déformation (échantillons 1b et 3)

En observant l'évolution des grains en fonction de la déformation, on remarque que les grains conservent une forme proche de celle de la microstructure initiale pour les zones où la déformation n'est pas très importante (18 à 36%). Par contre, pour les zones de fortes déformations, les grains sont très allongés et fins (figures 3-47 et 3-48).

Pour ce qui est de la recristallisation dynamique, bien qu'elle ne soit pas visible au niveau des micrographies dans les cas de fortes déformations, les courbes de déformation-temps montrent que la déformation à laquelle la présence de recristallisation dynamique est confirmée pour les zones de faibles déformations est atteinte plus tôt pour les zones de grandes déformations. Ce qui confirme que la recristallisation a eu lieu au niveau de ces zones.

3.6. Conclusion

Le chapitre 3 a permis de caractériser l'alliage 7175 et de modéliser le forgeage de manière expérimentale et numérique, de la mise en forme à l'étape de refroidissement. À partir de tests de compression axiale et latérale et de forgeage, nous avons validé le modèle de comportement de Johnson-Cook et la modélisation adéquate du procédé avec la méthode CEL. Un choix de coefficient de frottement constant conséquent avec les résultats de simulation a été effectué (l'erreur entre la simulation et l'expérimental est moins de 5%). Par ailleurs, l'investigation au niveau de la loi de Johnson-Cook modifiée tenant compte de la recristallisation dynamique a conduit à conclure que ce dernier est plus précis pour des tests s'effectuant à des températures au-delà de la température de recristallisation. Essentiellement, au-delà de 30% de déformation et de la température de recristallisation, le modèle de Johnson-Cook modifié reproduit mieux l'expérimental.

Comme le forgeage de la pièce simple est complété et les outils de simulations validés, nous allons dans le prochain chapitre compléter l'étude par l'analyse des résultats des contraintes résiduelles et des effets de la trempe sur ces dernières.

Chapitre 4

Contraintes résiduelles et traitement thermique de trempe

Dans ce chapitre, on traite des contraintes résiduelles de forgeage et après la trempe. Les résultats de simulation sont comparés avec les résultats expérimentaux.

4.1. Introduction

L'étude des contraintes résiduelles est une suite logique à l'étude effectuée au chapitre 3 sur la modélisation de la mise en forme. En effet, afin de connaître la qualité du produit obtenu après la mise en forme, étudier et quantifier les contraintes résiduelles est une étape primordiale.

Ainsi, l'objectif de ce chapitre est d'étudier les états de contraintes de la pièce après forgeage, leur distribution, leur nature et leur intensité. En effet, plus les contraintes résiduelles seront importantes, plus grand est le risque d'atteindre plus vite les limites du matériau.

Tout d'abord, nous présenterons les causes des contraintes résiduelles et différentes méthodes de mesures utilisés au niveau de l'industrie ainsi qu'une analyse d'erreur sur les mesures expérimentales.

Par la suite seront présentés les résultats de simulation et les résultats expérimentaux suivis d'une étude comparative pour fin de validation.

La dernière section de ce chapitre concerne l'étude du procédé de trempe et l'analyse des contraintes résiduelles qui s'y rattachent. L'étude de la trempe est présentée ici dans le but de procéder à une validation supplémentaire de la méthodologie de modélisation des contraintes résiduelles.

4.2. Contraintes résiduelles après le forgeage

Les contraintes résiduelles se définissent comme des contraintes multiaxiales statiques auto-équilibrées existant dans un système isolé de température et en l'absence de tout chargement extérieur [L12] (figure 4-1).

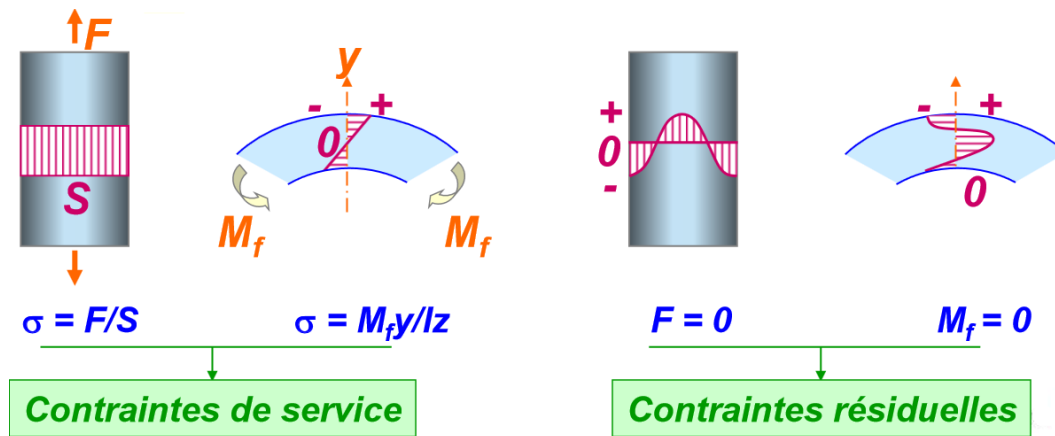


Figure 4 - 1 : Contraintes résiduelles versus contraintes de services [L12]

4.2.1. Causes des contraintes résiduelles

Les contraintes résiduelles résultent d'hétérogénéités (figure 4-2) (déformation plastique, gradient de température, transformation métallurgique) et se développent durant la plupart des procédés de fabrication et les traitements thermiques.

Certaines caractéristiques d'un matériau influencent le développement de contraintes résiduelles : la conductivité thermique, la capacité thermique, la dilatation thermique, le module d'élasticité, la plasticité, la thermodynamique, la cinétique des transformations, etc. ce qui complexifie l'étude et la détermination des contraintes résiduelles.

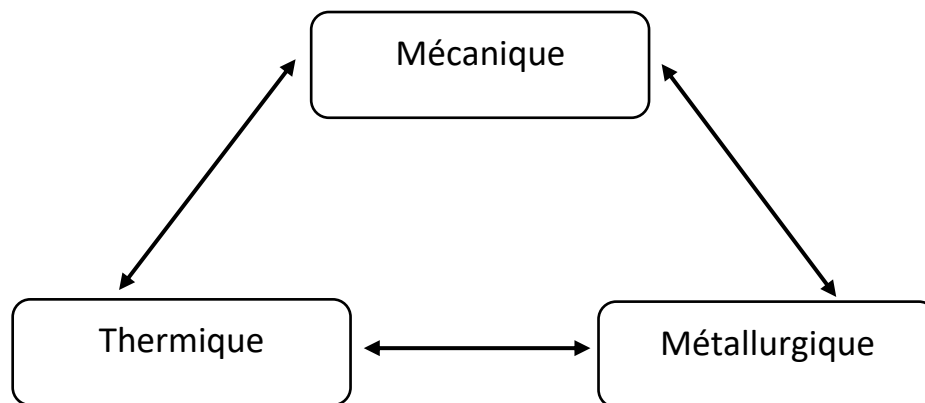


Figure 4 - 2 : Origines des contraintes résiduelles

4.2.2. Classification des contraintes résiduelles

Les contraintes résiduelles peuvent se définir à plusieurs échelles (figure 4-3) :

- échelle macroscopique : contraintes résiduelles du 1^{er} ordre, σ^I homogènes sur un très grand nombre de grains ; ces contraintes suscitent un intérêt capital pour la conception et l'analyse des défaillances, leur ampleur et direction.
- échelle mésoscopique : contraintes résiduelles du 2^e ordre, σ^{II} homogènes sur un grain ou une phase ; ces contraintes résiduelles sont considérées homogènes que sur des petits domaines du matériau, c'est-à-dire un grain ou une phase.
- échelle microscopique : contraintes résiduelles du 3^e ordre, σ^{III} homogènes sur quelques distances interatomiques. Les discontinuités microscopiques comme les bandes de glissement, les dislocations et d'autres défauts cristallins engendrent des champs de contraintes très variables localement et causent ce type de contraintes résiduelles.

La contrainte résiduelle globale est définie comme étant la somme des contraintes aux différentes échelles :

$$\sigma = \sigma^I + \sigma^{II} + \sigma^{III} \quad (4.1)$$

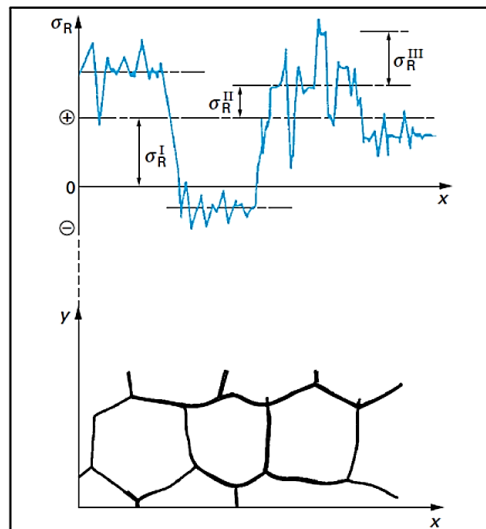


Figure 4 - 3 : Illustration des contraintes résiduelles d'ordre I, II et II

L'échelle macroscopique est généralement l'échelle utilisée en génie mécanique, il en va de même dans ce travail.

4.2.3. Méthode de mesure des contraintes résiduelles

Il existe différentes méthodes pour la mesure des contraintes résiduelles :

- Les méthodes non destructives telles que la méthode de diffraction par rayon X, elle permet d'étudier les contraintes résiduelles microscopiques et macroscopiques dans les différentes phases d'un même matériau [P5]. Elle offre une grande précision de mesure en surface, mais la profondeur de pénétration des rayons X ne dépasse généralement pas 30 μm dans les métaux usuels [F2].
- Les méthodes dites semi-destructives telles que la méthode de perçage de trou, qui consiste à percer un trou à l'endroit d'intérêt par incréments de profondeur au centre d'une jauge normalisée [A2]. Ces méthodes sont limitées à environ 1 mm au niveau de la profondeur de mesure [R2, W2] et dépendent de la qualité de la pose des jauges.
- Les méthodes dites destructives telles que la méthode des contours (MDC) :

C'est une technique basée sur la relaxation des contraintes. Les contraintes résiduelles du matériau sont calculées à partir des déformations mesurées perpendiculairement à un plan de coupe dans une pièce (figure 4-4). Les déformations sont mesurées par des jauges de déformation [P4]. En effet, lorsqu'une pièce avec des contraintes résiduelles est sectionnée (par électroérosion dans le cas présent), les surfaces nouvellement créées (après la coupe) se déforment de manière à libérer les contraintes internes. La distorsion des surfaces de coupe est alors mesurée à l'aide d'un profilomètre et sauvegardée sous la forme d'un nuage de points. Les données des deux surfaces (avant et après relaxation des contraintes) sont ajustées et filtrées pour éliminer le bruit. Les données sont ensuite traduites sous la forme de

splines cubiques. Par la suite, un modèle d'éléments finis représentant fidèlement la géométrie du plan de coupe de la pièce originale est produit. Les splines cubiques sont utilisées pour imposer des conditions frontières de déplacement aux nœuds du plan de coupe. Ainsi, les élévations correspondantes aux distorsions mesurées par profilométrie sont imposées aux nœuds du modèle d'éléments finis. Un calcul considérant un comportement linéaire élastique du matériau permet d'obtenir la distribution des contraintes résiduelles à l'origine de la distorsion des surfaces.

La méthode des contours (MDC) est intéressante par ce qu'elle permet d'avoir des cartographies complètes de contraintes résiduelles dans des pièces complexes. Cependant, seulement une composante de contrainte est mesurée dans ce cas et la méthode n'est pas précise près de la surface [S5] ; il s'agit de la méthode de mesure qui est utilisée dans ce travail.

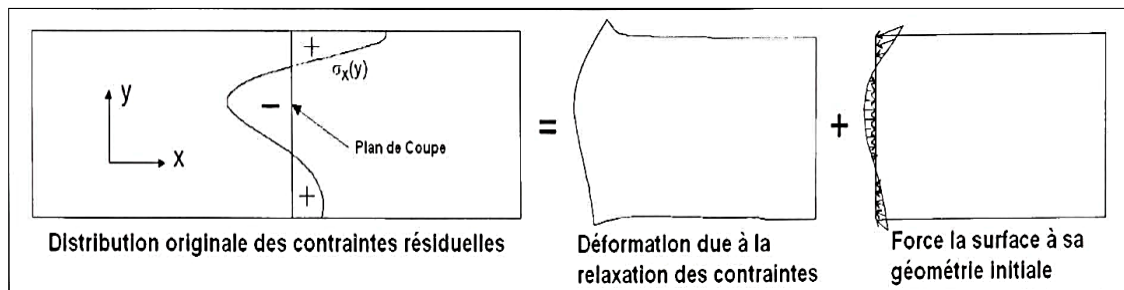


Figure 4 - 4 : Calcul de contraintes résiduelles par la méthode des contours [P4]

Dans la pièce simple étudiée, les mesures de contraintes résiduelles sont faites à l'emplacement indiqué sur la figure 4-5 (à mi-longueur de la pièce). Cet emplacement est choisi car la section de coupe présente différentes épaisseurs et niveaux de déformations.

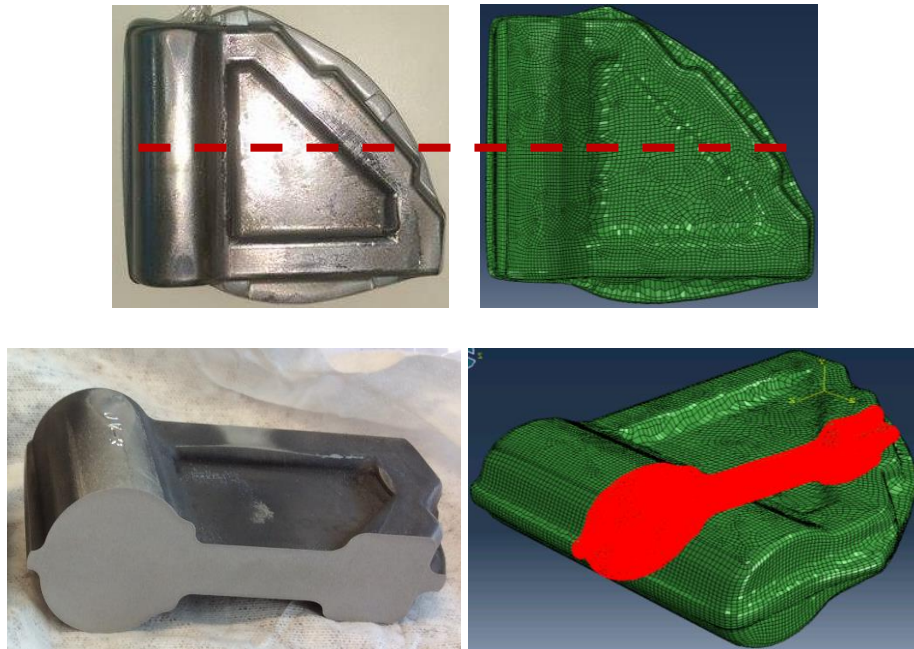


Figure 4 - 5 : Zone de coupe pour les mesures de contraintes résiduelles

4.2.4. Estimation d'erreur de mesure par la méthode de contours

En plus du fait qu'il est coûteux en temps et en matériau de refaire plusieurs fois une mesure pour déterminer l'erreur de mesure, il est impossible de refaire deux fois une mesure au même endroit sur le même échantillon puisque la méthode est destructive. Il est donc difficile de mesurer à plusieurs reprises un échantillon de référence possédant des contraintes résiduelles connues.

L'erreur de mesure dépend de plusieurs facteurs, le matériau, la géométrie, la sévérité du gradient de contraintes et la qualité de la coupe. Une coupe ne respectant pas les hypothèses fondamentales, une densité de la grille de mesure insuffisante par rapport au gradient à mesurer, un traitement des données incorrect (ex : trop ou pas assez de lissage), etc. sont autant de possibilités de sources d'erreur [S5].

L'erreur sur la mesure/application de la méthode elle-même, dépendante des facteurs cités dans le paragraphe précédent. Une estimation fiable de cette erreur nécessite une étude statistique sur plusieurs tests, coûteuse et longue à réaliser. Dans le cadre de notre travail, nous nous contenterons des données de la littérature, combinées à la

dispersion de nos résultats expérimentaux pour déterminer une plage d'erreur acceptable. Selon [C5, L13], la méthode des contours permet d'évaluer le niveau de contraintes résiduelles au travers d'une section complète d'une pièce avec une erreur d'environ ± 10 MPa. Par ailleurs d'autres sources [P4] mentionnent que l'erreur de mesures pour la méthode des contours est de l'ordre de 20%. Ces chiffres sont subjectifs et difficiles à valider. Toutefois, si on se fie à nos résultats de mesures de contraintes résiduelles (figure 4-9 et figure 4-11), on remarque une différence de 13 MPa en moyenne entre les valeurs maximale et minimale de nos deux tests.

En marge de l'erreur de la méthode des contours, il est possible d'avoir une autre source d'erreur possible, il s'agit de la densité de la grille que nous avons déjà évoquée.

Dans le cadre de ce travail, les mesures de contraintes résiduelles ainsi que le calcul d'erreur présenté ci-dessous ont été effectués par la compagnie SADEC.

La méthodologie employée pour le calcul d'incertitude sur les contraintes est celle proposée par Prime [P4]. Cette méthode permet de déterminer la densité idéale de la grille de régression de splines cubiques. Elle permet aussi d'évaluer l'incertitude des contraintes calculées avec cette régression et de localiser les endroits du modèle où le calcul est moins précis. L'écart de la moyenne quadratique (RMS) (équation 4.2) est évalué entre les déplacements calculés g_k et mesurés f_k sur le domaine constitué de nn points de mesure.

$$E_{RMS} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{nn} (g_k - f_k)^2}{nn}} \quad (4.2)$$

Il propose aussi de calculer l'écart de contrainte $\delta\sigma_k$ entre deux densités de grille j de régression à chacun des nœuds k de la surface du modèle pour en calculer la moyenne quadratique $\delta\sigma_j$ à l'aide des relations suivantes :

$$\delta\sigma_{kj} = \frac{1}{\sqrt{2}} \|\sigma_{k,j} - \sigma_{k,j-1}\| \quad (4.3)$$

$$\overline{\delta\sigma}_j = \frac{1}{\sqrt{ndn}} \sum_{k=1}^{ndn} \delta\sigma_{k,j} \quad (4.4)$$

où ndn représente le nombre de nœuds de surface. En déterminant le minimum de ces paramètres, on trouve la densité optimale de la grille de régression des splines pour le calcul des contraintes. Ce calcul d'incertitude sur les contraintes permet d'évaluer l'erreur attribuable à la qualité de la régression polynomiale. Cependant, il ne peut évaluer l'erreur due aux artefacts de coupe et aux erreurs de lecture.

Le tableau 4-1 ci-dessous présente le calcul d'incertitude pour la pièce Q1 (Échantillon forgé et trempé).

Tableau 4- 1 : Résultats de calculs d'incertitude à une densité de grille $\rho = 1,6$ knot/mm

Échantillon	$E_{RMS} (\mu m)$	$\overline{\delta\sigma}$ (MPa)	$\delta\sigma_{\max}$ (MPa)
Q1	0.55	2	8

Le paramètre E_{RMS} , donné par l'équation 4.2, est la mesure de l'écart moyen entre les déplacements mesurés et calculés aux nœuds de la surface. Cet écart moyen, maximum pour la pièce Q1 à 0,55 μm , relatif au déplacement maximum mesuré sur le profil de la pièce, représente une erreur relative inférieure à 1%, car celui-ci peut facilement excéder 50 μm .

L'écart moyen des contraintes calculées entre deux densités de grille permet de justifier le choix de la densité de grille à la convergence des résultats. À 1,6 knot/mm, cet écart moyen n'excède pas 2 MPa. Le dernier paramètre du tableau, $\delta\sigma_{\max}$ est l'écart maximal observé à un nœud de surface. Le détail de cette analyse est présenté à la section suivante.

La figure 4-6 montre l'évolution de l'écart RMS et de l'incertitude des contraintes pour l'échantillon Q1. On remarque que l'écart RMS décroît rapidement pour atteindre un minimum à 0,55 μm . L'incertitude des contraintes décroît moins rapidement avant de se stabiliser. Cette tendance est aussi perceptible à la figure 4-7 qui présente l'évolution des

contraintes maximale et minimale. Ces deux graphiques indiquent qu'un choix de densité de grille de spline de 1,6 joints/mm est suffisant pour minimiser l'incertitude des contraintes. La figure 4-7 montre la distribution des contraintes résiduelles finales. Une contrainte maximale de 259 MPa et une contrainte minimale de -326 MPa sont observées. La figure 4-8 montre la distribution de l'incertitude des contraintes sur la surface. À l'exception de quelques points périphériques, l'incertitude est inférieure à 2 MPa.

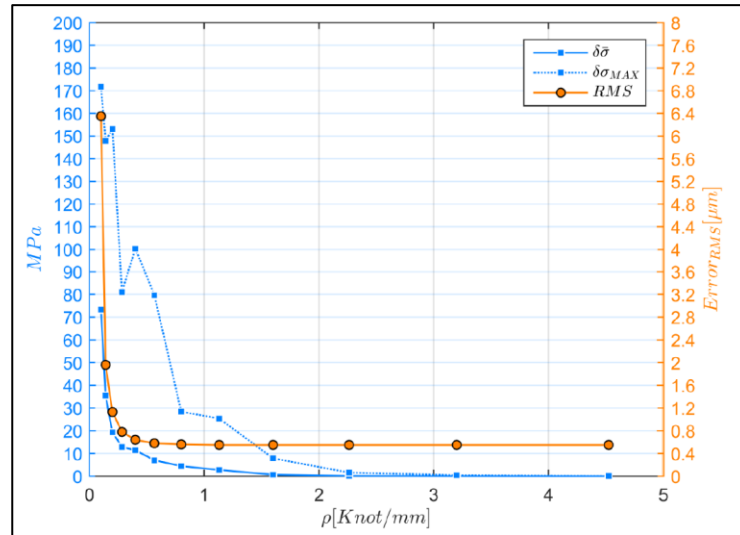


Figure 4 - 6 : Incertitude sur les contraintes et écart RMS en fonction de la densité de la grille de splines cubiques pour l'échantillon Q1

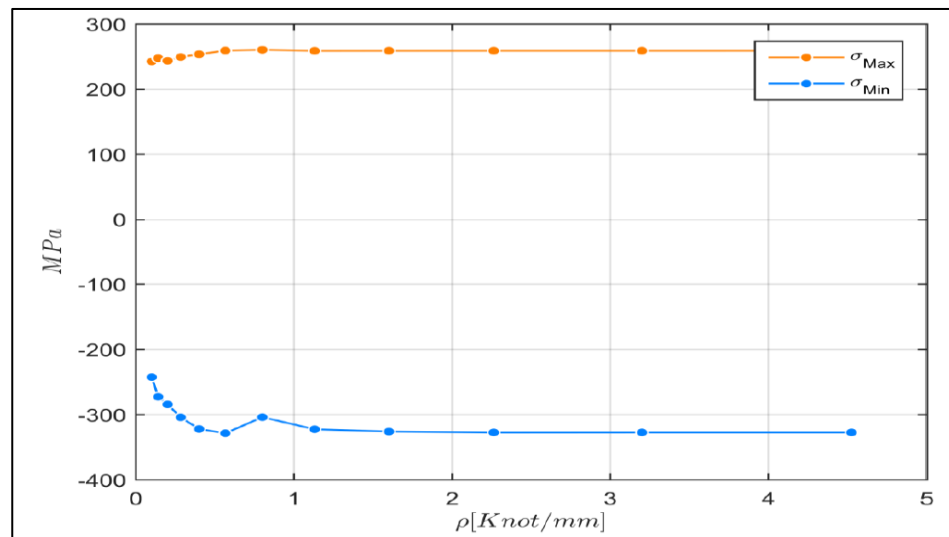


Figure 4 - 7 : Évolution des contraintes minimale et maximale calculées en fonction de la densité de la grille des splines cubiques pour l'échantillon Q1

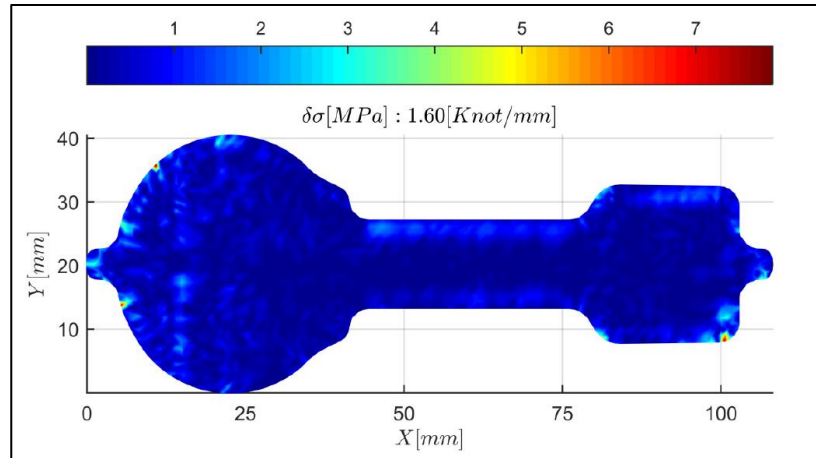


Figure 4 - 8 : Distribution de l'incertitude des contraintes pour l'échantillon Q1

Remarque : D'autres calculs d'incertitude sur les contraintes (autres pièces) effectués et dont le détail ne sera pas présenté ici (tableau 4-2) ont montré que l'erreur introduite par le calcul ÉF (avec la densité de grille optimale de 1,6 knot/mm) peut varier d'une pièce à l'autre. Elle monte jusqu'à 37% dans le cas de la pièce F3 versus 3% pour Q1 et 4,2% pour QA1 (Échantillon forgé, trempé et vieilli).

Tableau 4- 2: Tableau d'incertitude de mesure de contraintes résiduelles en fonction du maillage ÉF (densité de grille optimale de 1,6 knot/mm)

Échantillon	E_{RMS} (μm)	$\delta \bar{\sigma}$ (MPa)	$\delta \sigma_{\max}$ (MPa)	$\sigma_{\max}$	$\sigma_{\min}$	Erreur
Q1	0.55	2	8	259	-325	3%
F3	0.25	2	24	65	-56	37%
QA1	0.40	1	8	191	-212	4.2%
Q1 : Échantillon forgé et trempé numéro 1, F3 : Échantillon Forgé numéro 3, QA1 : Échantillon forgé, trempé et vieilli numéro 1.						

Les raisons de la grande erreur sur F3 sont inconnues et peuvent être d'ordre numérique ou être attribuables à la coupe elle-même. Compte tenu de la disparité des résultats de calcul d'erreur, dans le cadre de nos simulations, nous ne considérerons pas

l'erreur liée au maillage. Seule la variabilité sur les mesures des résultats expérimentaux sera considérée.

4.2.5. Résultats des mesures expérimentales et simulées des contraintes résiduelles

Les figures suivantes donnent les résultats des mesures de contraintes résiduelles expérimentales (avec une grille de 1,6 knot/mm) et simulées après forgeage.

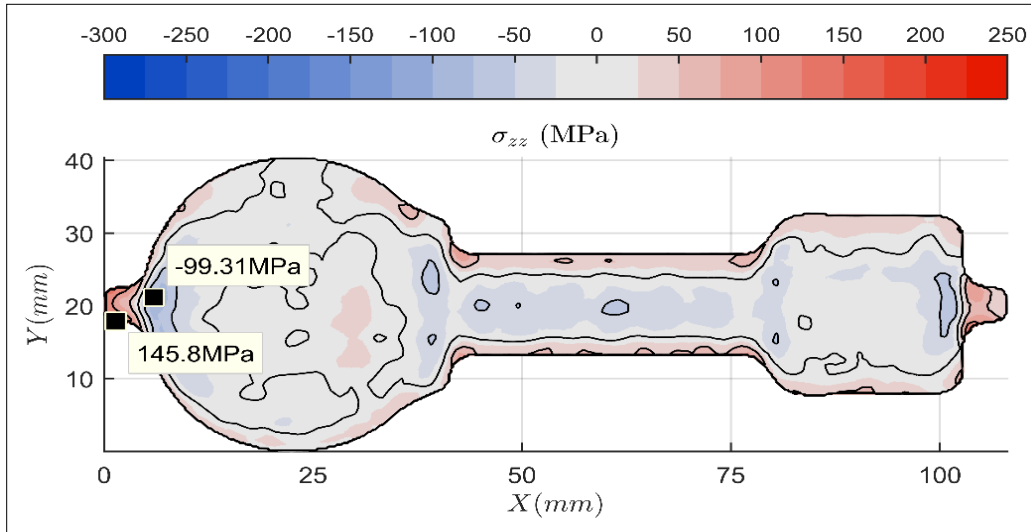


Figure 4 - 9 : Position des contraintes maximale et minimale dans la section de coupe F1 (échantillon forgé numéro1)

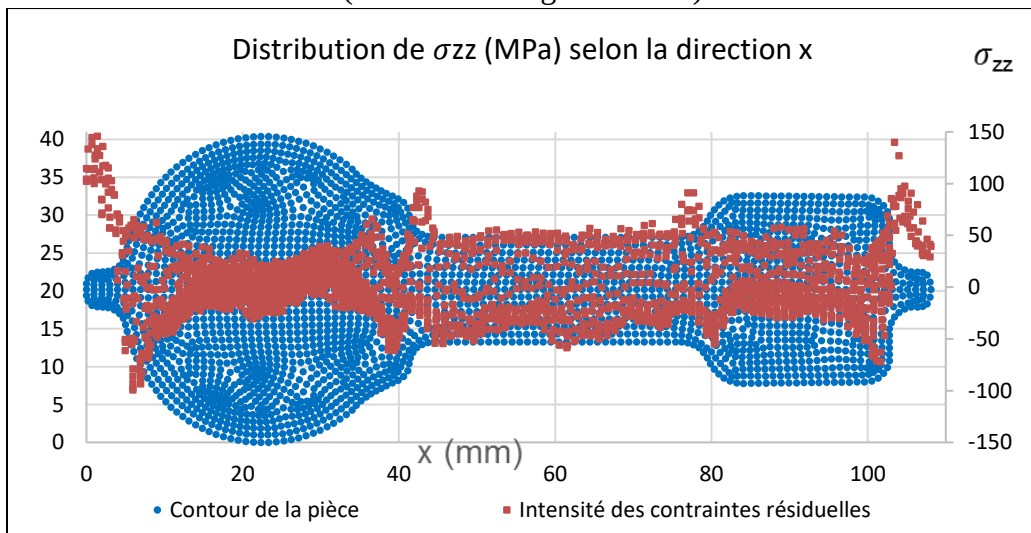


Figure 4 - 10 : Contraintes résiduelles le long de l'axe horizontal dans la section de coupe F1 (échantillon forgé numéro 1)

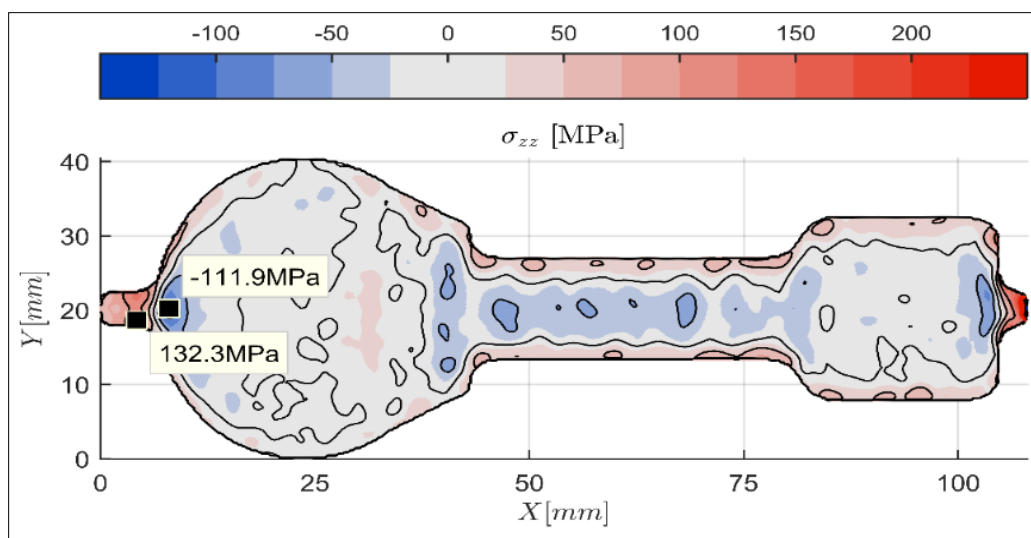


Figure 4 - 11 : Position des contraintes maximale et minimale dans la section de coupe F2 (échantillon forgé numéro 2)

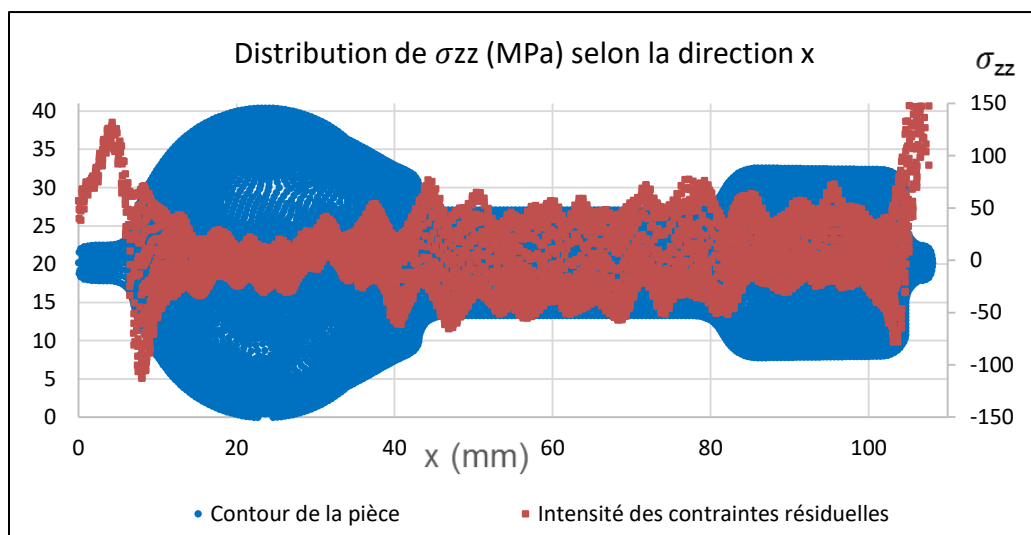


Figure 4 - 12 : Contraintes résiduelles le long de l'axe horizontal dans la section de coupe F2 (échantillon forgé numéro 2)

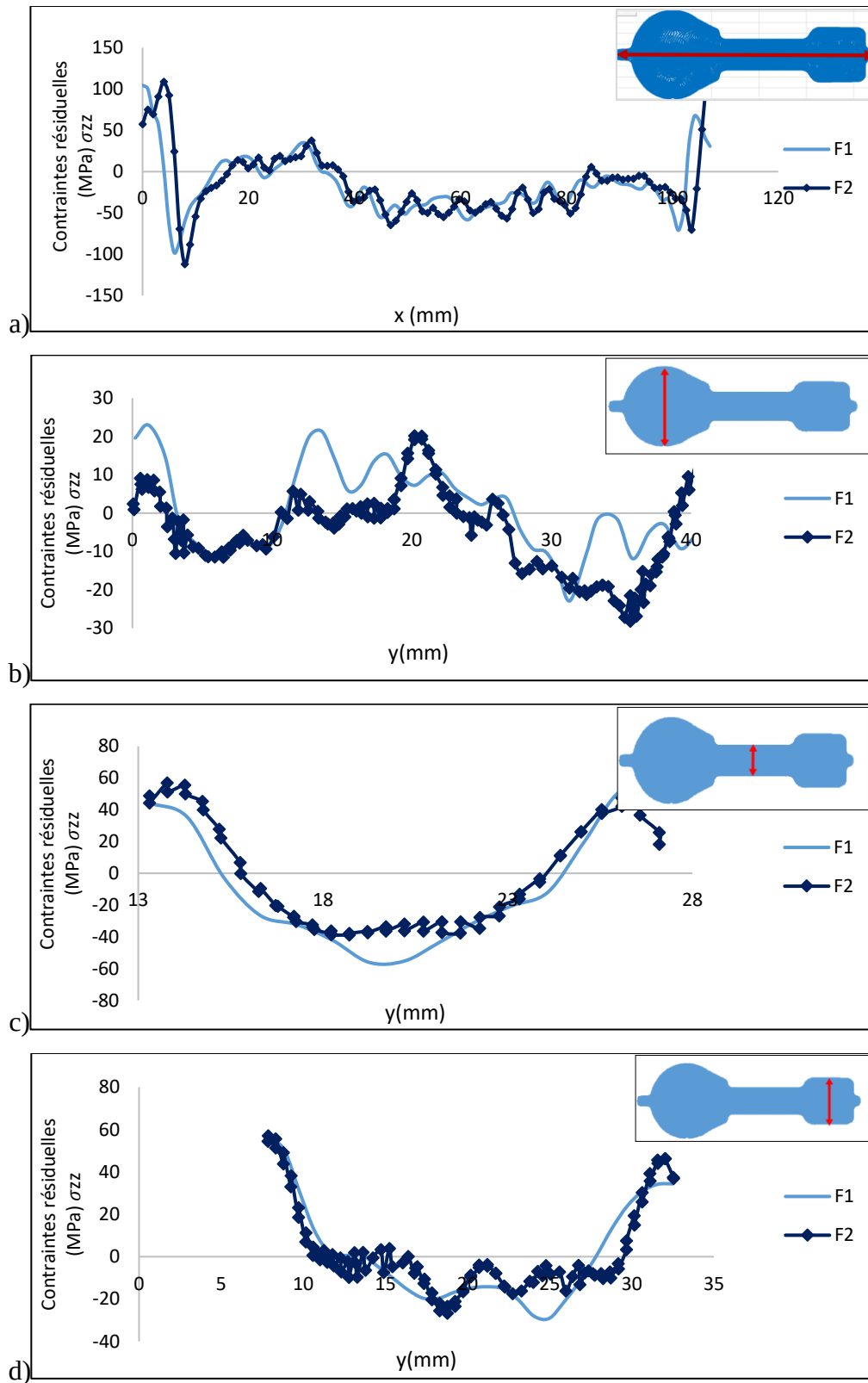


Figure 4 - 13 : Comparaison expérimentale des valeurs de contraintes résiduelles de forgeage selon différentes sections

La figure 4-13 ci-dessus compare le résultat expérimental F1 à celui F2 selon différentes sections de la pièce (horizontale et verticale). Cette comparaison permet de déterminer que l'écart-type moyen entre les deux mesures expérimentales est de 12,25 MPa sur l'axe central de la pièce et respectivement de 8,26 MPa, 11,6 MPa et 13,6 MPa pour les sections verticales situées à différents endroits sur la pièce (figure 4-13). Soit en moyenne 11-12 MPa d'écart moyen acceptable sur les futurs résultats de simulation.

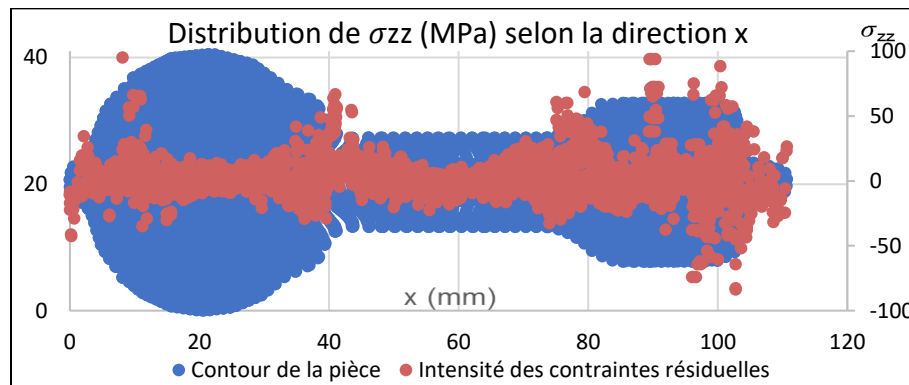


Figure 4 - 14 : Intensité et distribution des contraintes résiduelles S33 (σ_{zz}) globales de simulation sur l'axe horizontale

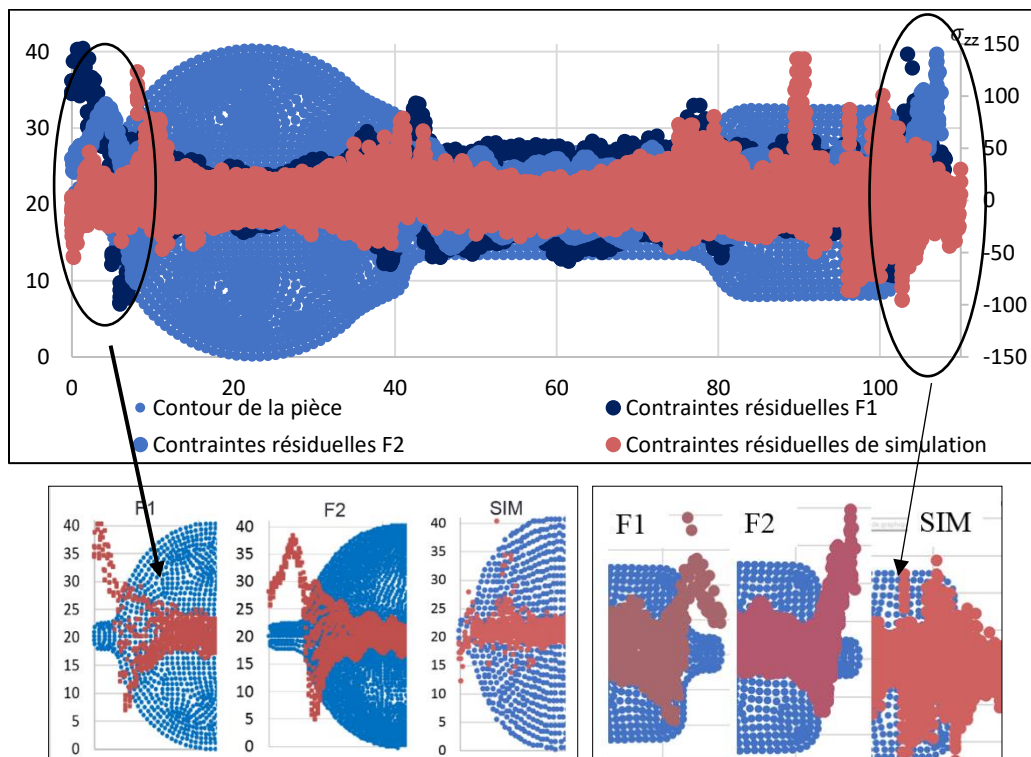


Figure 4 - 15 : Comparaison graphique des résultats expérimentaux avec la simulation

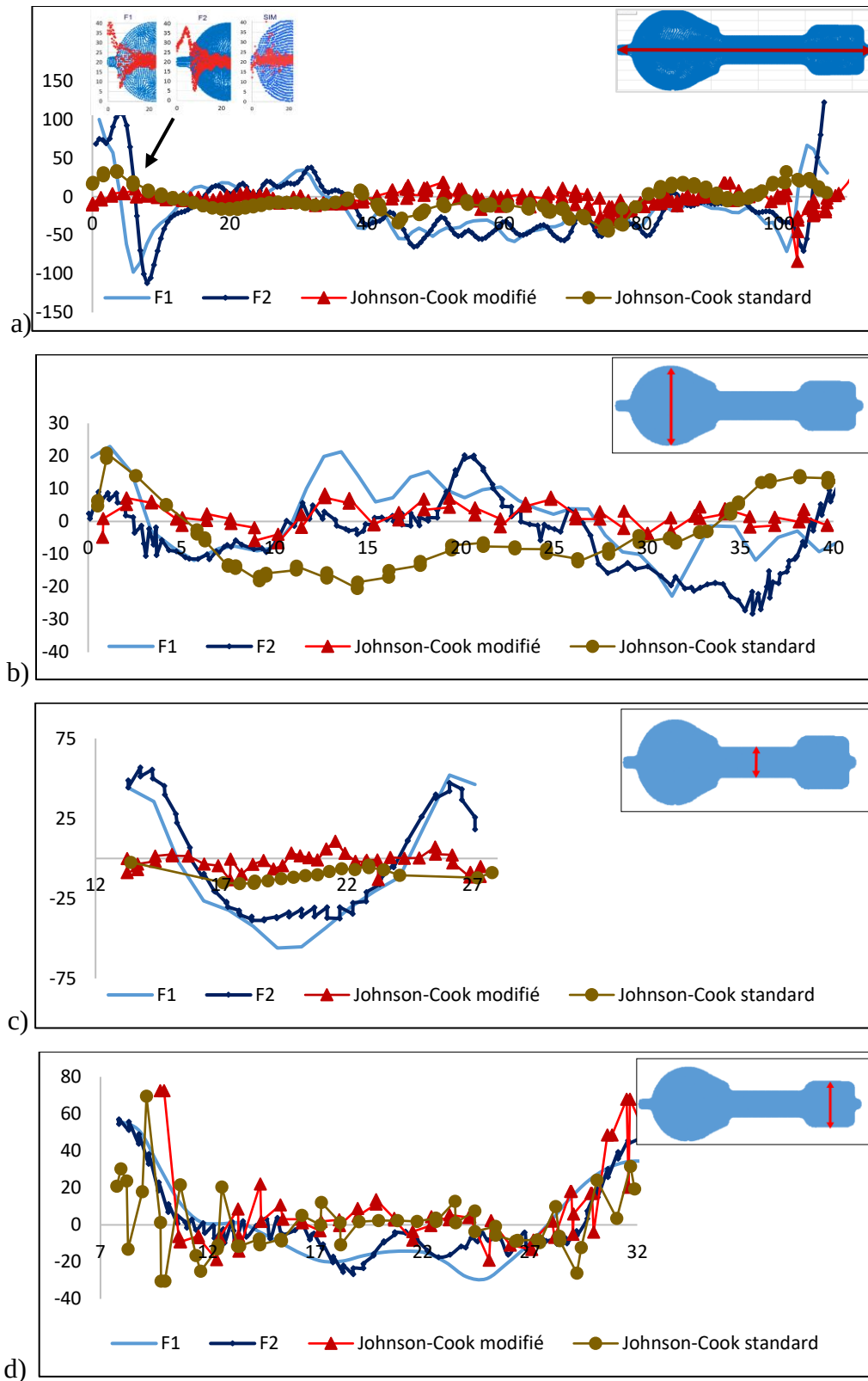


Figure 4 - 16 : Comparaison de l'expérimental avec la simulation des valeurs de contraintes résiduelles de forgeage selon différentes sections.

La comparaison des résultats expérimentaux avec la simulation (figure 4-15 et 4-16) montre que la simulation reproduit bien à certain niveau le profil de la distribution des contraintes observé au niveau des résultats expérimentaux. On remarque par ailleurs que le modèle de Johnson-Cook modifié donne des résultats plus proches de l'expérimental à certains niveaux bien que les résultats du Johnson-Cook standard ne soient pas très différents. Dans l'ensemble les contraintes expérimentales comme simulées sont faibles, ce qui est attendu pour le cas du forgeage à chaud. En considérant la dispersion entre les deux résultats expérimentaux, les résultats numériques demeurent valides, toutefois, de meilleurs résultats pourraient être obtenus en considérant la densité et la conductivité changeant en fonction de la température [N1], seule l'évolution de l'expansion thermique en fonction de la température a été considérée dans nos simulations. Cette considération aurait permis de prendre en compte et de mieux capter l'effet de l'évolution des propriétés sur les contraintes résiduelles et d'obtenir des résultats de simulation plus précis.

Il est important de souligner aussi que les modèles numériques ne reproduisent pas très bien les contraintes résiduelles au niveau de la partie centrale (mince) de la pièce (figure 4-17 c)). Cela peut être dû à une difficulté des modèles numériques à capter l'effet de transformations métallurgiques qui ont pu avoir lieu pendant le refroidissement de la pièce notamment au niveau de la section mince et qui ont un effet sur les contraintes résiduelles. Pour le cas des contraintes aux extrémités, cela peut être le résultat d'un effet de bord (les contraintes se balancent presque en tension et compression) due à la nature de la méthode des contours. En effet, la coupe peut entraîner certaines distorsions au début et à la fin de la coupe (ici les bords de la pièce). Ce point sera à nouveau discuté dans la section suivante qui traite des contraintes résiduelles de trempe et nous tenterons de tirer des conclusions plus précises appuyées par des observations au niveau de la littérature. Également, les bavures («flash») situées aux extrémités de la pièce ne sont pas très bien reproduites. Cela s'explique par le fait qu'en simulation les bavures sont moins étendues, ce qui peut être en partie lié au coefficient de frottement que l'on considère constant tout au long de la simulation. En effet, l'utilisation d'un coefficient de frottement constant dans le temps et dans l'espace n'est pas tout à fait reproductrice de la réalité car, à mesure que la mise en forme se poursuit et que le matériau subit des transformations, la nature du contact entre les matrices et la pièce se modifie. Un modèle de frottement variable au cours de la

simulation qui tiendrait compte de l'état du matériau pour ajuster la valeur du coefficient de frottement serait plus approprié. Vis-à-vis de l'intégration des paramètres procédés et matériau, il s'agit d'un point essentiel à une modélisation plus complète et plus précise du procédé. Toutefois, dans le présent travail nous ne pousserons pas l'investigation plus loin.

4.3. Traitement de trempe et contraintes résiduelles

L'analyse effectuée dans cette section a pour but de confirmer l'approche utilisée pour la modélisation des contraintes résiduelles. Il s'agit donc d'une étape de validation supplémentaire de la méthodologie de modélisation des contraintes résiduelles en utilisant un cas complexe de transformations thermomécanique et métallurgique.

La plupart des matériaux sont susceptibles de subir des traitements thermiques. Les traitements thermiques permettent de modifier la structure interne des matières plastiques, des verres, des céramiques, mais ce sont les matériaux métalliques, métaux et alliages, qui offrent les plus grandes possibilités de traitements thermiques [P6]. Il existe différents traitements thermiques appliqués aux alliages d'aluminium selon les besoins :

- les traitements dits d'homogénéisation généralement pratiqués sur les produits coulés avant leur transformation ou également sur les produits déjà corroyés ;
- les traitements d'adoucissement par recuit ou restauration, généralement appliqués en cours ou en fin de transformation ;
- les traitements de trempe structurale comprenant :
 - une mise en solution,
 - une trempe,
 - une maturation ou /et un revenu produisant le durcissement.

On s'intéresse au dernier traitement qui consiste à maintenir à la température ambiante une solution solide sursaturée en éléments d'addition. Cette solution solide est obtenue en effectuant une mise en solution des éléments constituant les précipités présents à la température ambiante. Après la trempe on obtient une solution solide sursaturée en

éléments d'addition. À la température ambiante, cette solution est métastable. La trempe fige cet état de dissolution et également capture les lacunes créées par l'effet de la température. Les éléments d'additions ainsi que les lacunes sont positionnés de manière aléatoire en substitution des atomes d'aluminium aux nœuds du réseau cristallin de la matrice aluminium. Les propriétés du matériau s'en trouvent ainsi modifiées. Le refroidissement inhomogène combiné à la rigidité de la pièce est à l'origine des contraintes résiduelles qui vont être induites par le traitement thermique.

En effet, lorsque les contraintes thermiques dépassent la limite d'élasticité du matériau, un écoulement plastique localisé se produit résultant en un état de contraintes résiduelles à la température ambiante. Les contraintes résiduelles peuvent être problématiques à plusieurs égards. Elles peuvent provoquer une déformation permanente au-delà des limites de tolérance dimensionnelle acceptables et peuvent également causer une déformation de la pièce pendant les opérations d'usinage [B6] subséquent à un procédé de mise en forme tel que le forgeage. D'où l'intérêt de les identifier (contraintes résiduelles de tension ou de compression ?) et de les quantifier dans la mesure du possible.

Pour les alliages d'aluminium, on utilise généralement l'eau ou l'air. Chacun de ces milieux de trempe a un taux de refroidissement différent. Si la vitesse de refroidissement est rapide (exemple de l'eau), les propriétés mécaniques obtenues sont très intéressantes (résistance mécanique élevée), mais le niveau des contraintes résiduelles ainsi que le niveau de distorsion peuvent être élevés. Pour un taux de refroidissement lent, les niveaux de contraintes résiduelles et la distorsion sont plus faibles, mais les propriétés mécaniques obtenues peuvent être moins intéressantes [R3].

L'utilisation de la trempe pour les alliages d'aluminium comporte certains avantages, par exemple, une contrainte résiduelle de compression peut améliorer la vie en fatigue [L9] ou freiner la propagation d'une fissure.

Dans notre cas, nous utiliserons l'eau comme milieu de trempe en faisant varier son état initial.

4.3.1. Modélisation de la trempe

But : Le but ici est d'étudier l'effet de la trempe et de la condition de trempe (trempe avec agitation et trempe sans agitation) sur les contraintes résiduelles après forgeage.

Le bac de trempe utilisé pour nos tests contient environ 15 litres d'eau (la température de l'eau a été mesurée et ne changeait pas lors de la trempe). Avant la trempe, les pièces sont chauffées à 470°C pendant 1h30 pour les cylindre et 2h30 pour les pièces forgées (figure 4-17). Après l'ouverture du four, les pièces sont trempées le plus rapidement possible (4-5 secondes entre l'ouverture de la porte et le moment où les pièces entrent dans l'eau). Pour le cas de la trempe avec agitation, la vitesse de déplacement de l'eau dans la zone où la pièce est trempée est d'environ 0.44 m/s.

Procédure : À la figure 4-17, on peut voir les étapes du procédé de trempe pour une condition T74. La procédure adoptée consiste à placer différents thermocouples dans la pièce afin de connaître l'évolution de la température à chaque pas de temps. Ces données combinées aux paramètres géométriques et thermiques du matériau permettent de déterminer le coefficient de transfert de chaleur lors de la trempe (équation 4.5). Ce coefficient sera utilisé pour la simulation du procédé avec Abaqus. La figure 4-18 montre les différentes interactions entre les paramètres pour la modélisation du procédé de trempe.

$$h = \frac{mC_p}{p\Delta tA} \ln \left[\frac{T^a - (T_n^{TC})_E}{T^a - (T_{n+p}^{TC})_E} \right] \quad (4.5)$$

où m est la masse, Cp est la capacité thermique du matériau, p est le nombre de pas de temps, Δt est l'intervalle de temps, A est la surface en contact avec l'eau, T^a est la température ambiante, n est le nombre d'intervalles de temps, T_n^{TC} est la température du thermocouple à n et E désigne l'expérimental.

Modélisation : Pour la simulation de la trempe, une analyse thermomécanique est effectuée par ÉF dans Abaqus. Le type d'éléments utilisé est C3D8RT. Le modèle de comportement de Johnson-Cook pour l'alliage 7175 est utilisé avec les coefficients d'expansion thermique variables en fonction de la température de l'alliage 7075 [N1]. Nous

ne disposons pas des coefficients de l'alliage 7175, toutefois comme l'alliage 7175 est une dérivée du 7075, on peut poser l'hypothèse qu'il n'y aura pas une grande variabilité entre les deux. La comparaison des simulations avec les résultats expérimentaux permettra de confirmer ou non cette hypothèse.

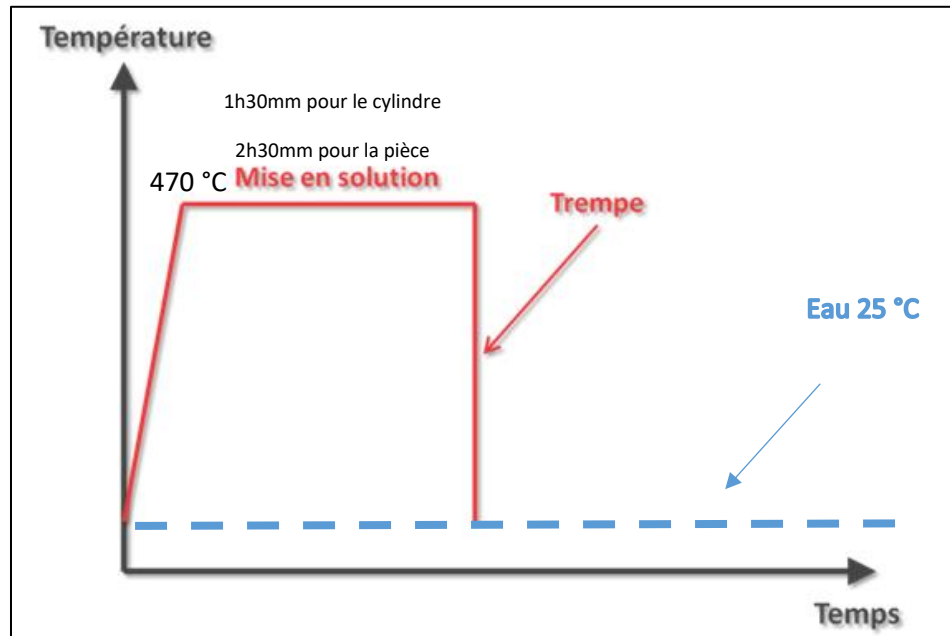


Figure 4 - 17 : Séquence de trempe des cylindres et de la pièce simple

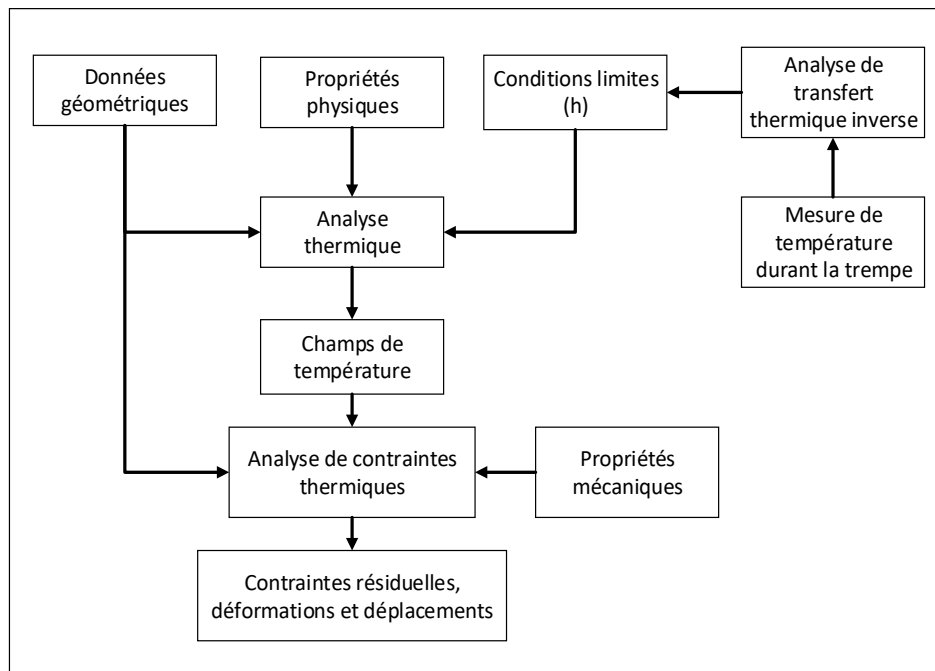


Figure 4 - 18 : Diagramme de modélisation de l'analyse de la trempe [R3]

4.3.2. Trempe de coupons cylindriques

On commence par étudier la trempe sur des coupons cylindriques (figure 4-19) pour deux raisons principales :

- Développer une méthodologie d'analyse et de simulation et s'assurer de la bonne marche de notre démarche.
- Par ailleurs, puisqu'on s'intéresse particulièrement à la partie cylindrique de la pièce simple, par analogie on travaille avec des coupons de même forme géométrique.

Deux configurations de trempe ont été testées afin de quantifier leur effet sur les contraintes résiduelles. Il s'agit de la trempe avec agitation de l'eau et la trempe sans agitation de l'eau. Les résultats expérimentaux et de simulation sont présentés à la figure 4-20.

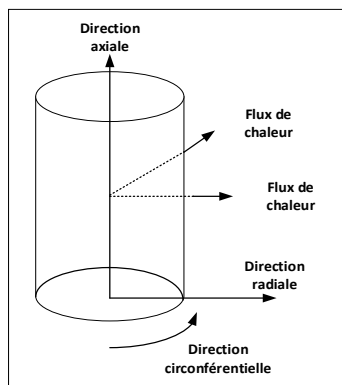


Figure 4 - 19 : Cylindre de trempe [R3]

À partir des données de température recueillies par les thermocouples et des données géométriques du cylindre, nous avons déterminé les coefficients de transfert thermique et avons procédé à la simulation de la trempe.

Au cours de la trempe, la surface refroidit plus vite que le centre de la pièce. Cela place la surface dans un état de tension et de l'intérieur dans un état de compression. Ainsi, lorsque le centre refroidit et se contracte, ça tire sur la surface et les états de contraintes s'inversent. À la fin du refroidissement, la surface se trouve en compression et le centre en tension [B6], c'est ce qu'on observe pour le cas de nos échantillons trempés (figure 4-20).

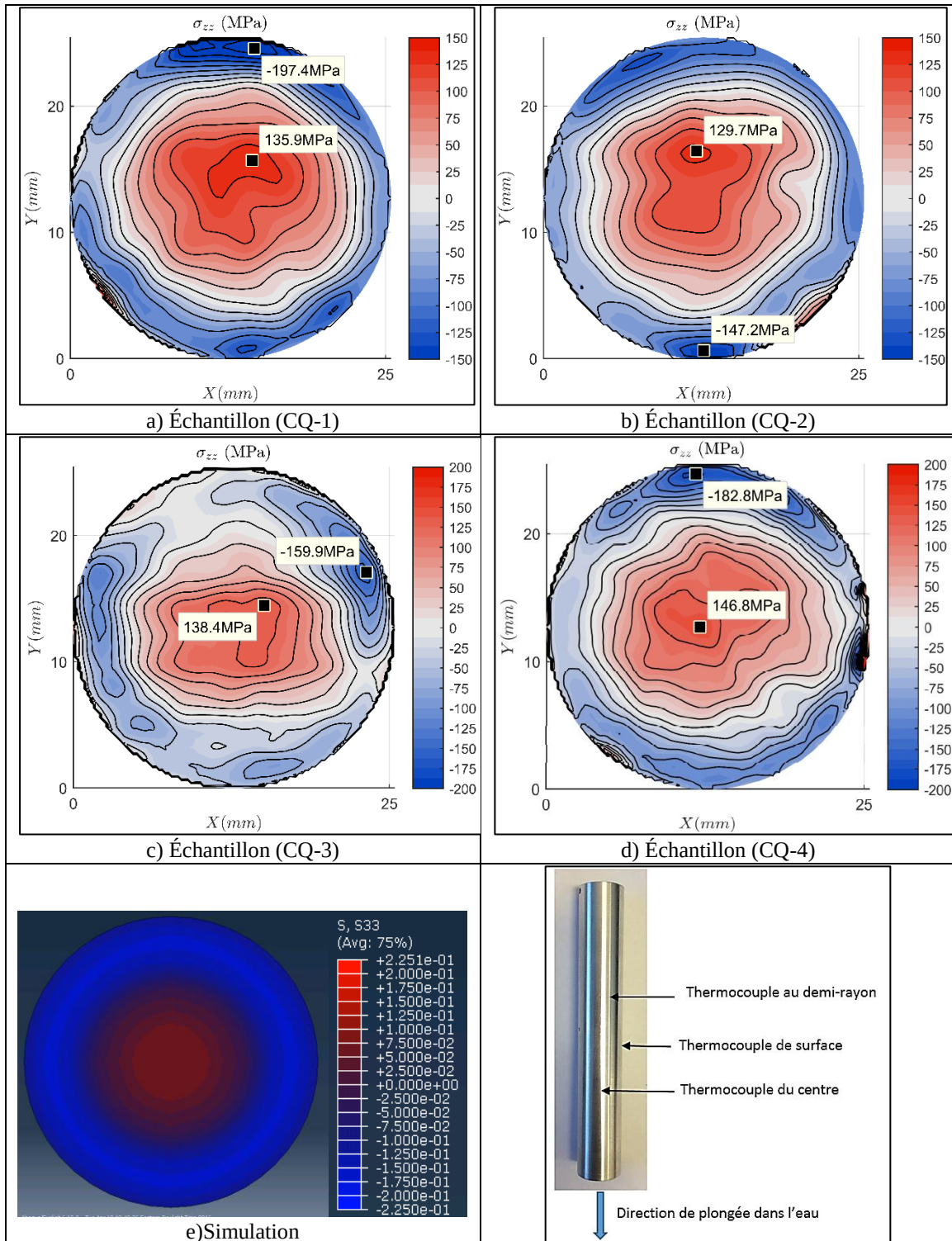


Figure 4 - 20 : Position des contraintes maximale et minimale dans la section de coupe pour le cas de trempe (CQ1=Trempe sans agitation ; CQ2=Trempe avec agitation ; CQ3=Trempe sans agitation (répétition de CQ-1) ; CQ4=Trempe avec agitation (répétition de CQ-2))) et position des thermocouples le long de l'échantillon cylindrique

La comparaison des résultats expérimentaux et de simulation se fait de deux manières : on compare d'abord l'évolution de la température lors de la trempe pour s'assurer que le profil de température est le même (figure 4-21 et figure 4-22) et par la suite on compare les contraintes résiduelles.

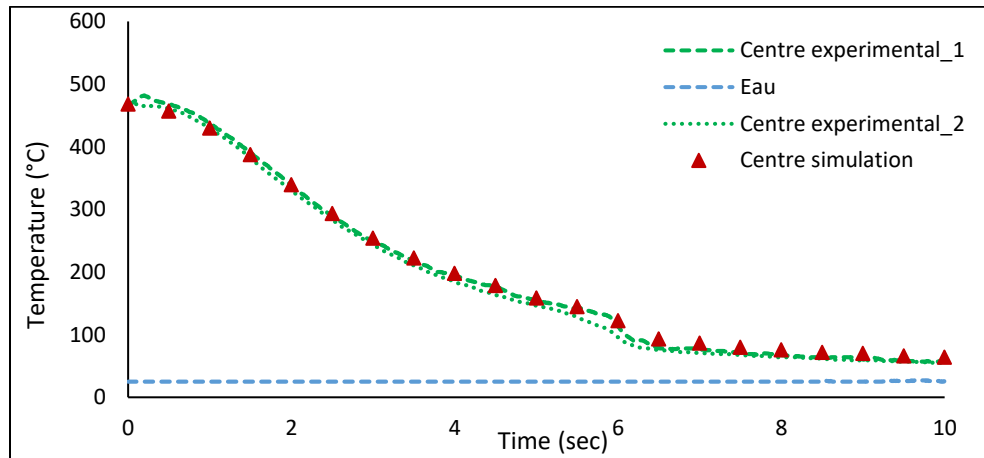


Figure 4 - 21 : Évolution de la température lors de la trempe du cylindre au centre (expérimental vs simulation)

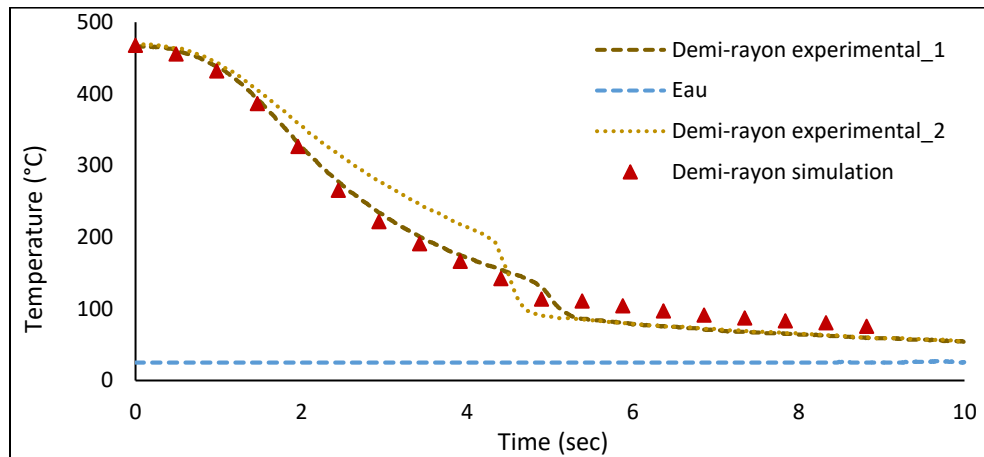


Figure 4 - 22 : Évolution de la température lors de la trempe du cylindre au demi-rayon (expérimental vs simulation)

On remarque une chute plus ou moins soudaine de la température. Expérimentalement, en se basant sur l'intervalle de température à laquelle elle se produit,

soit entre 150°C et 100°C (voir figure 4-23), on peut expliquer ce phénomène par le fait qu'au début de la trempe, il y a une couche de vapeur qui entoure la pièce et ralentit le refroidissement. Dans le temps, lorsque la température de la pièce baisse, cette couche disparaît et le métal entre en contact direct avec l'eau, le refroidissement se fait alors rapidement avant de se stabiliser à nouveau jusqu'à la fin du processus. Le centre de la pièce, qui n'est pas en contact direct avec l'eau, est moins affecté par ce phénomène comme on peut le voir à la figure 4-21.

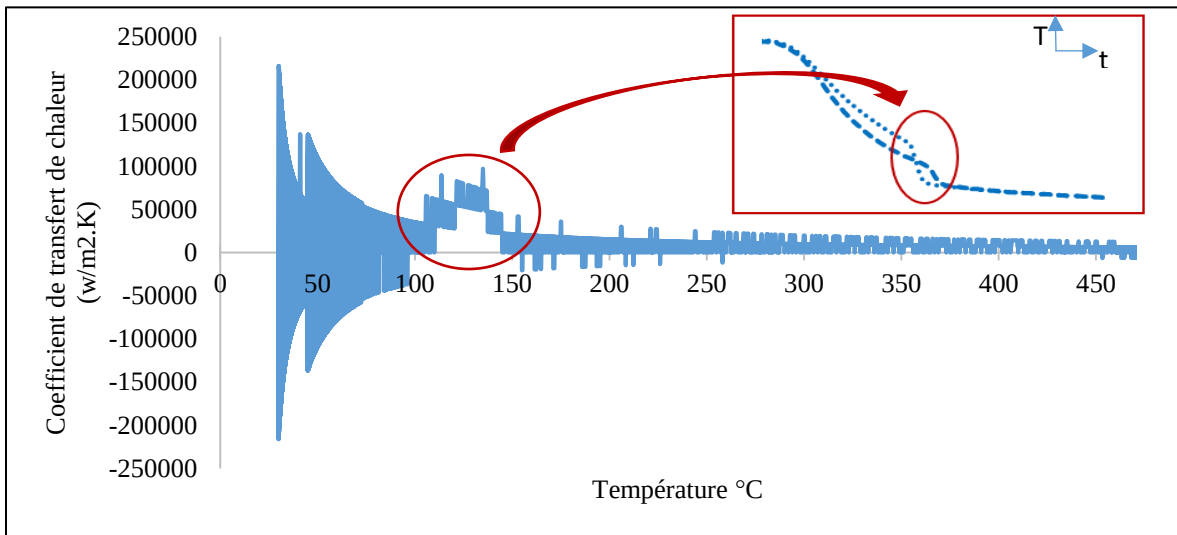


Figure 4 - 23 : Variation du coefficient de transfert thermique en fonction de la température et réaction endothermique

Afin d'investiguer davantage à ce niveau, nous reproduisons les tests de trempe sur les échantillons cylindriques à une température plus élevée (67 °C). La température de l'eau (67 °C) est plus proche de la température de réaction (100 °C) et par ailleurs, le matériau refroidit plus lentement, ce qui dans le cas de pièces de grandes dimensions (pièce industrielle) prévient les ruptures causées par des contraintes thermiques trop importantes (chocs thermiques) ainsi qu'une variation significative des dimensions. La comparaison des courbes d'évolution de la température est donnée ci-dessous.

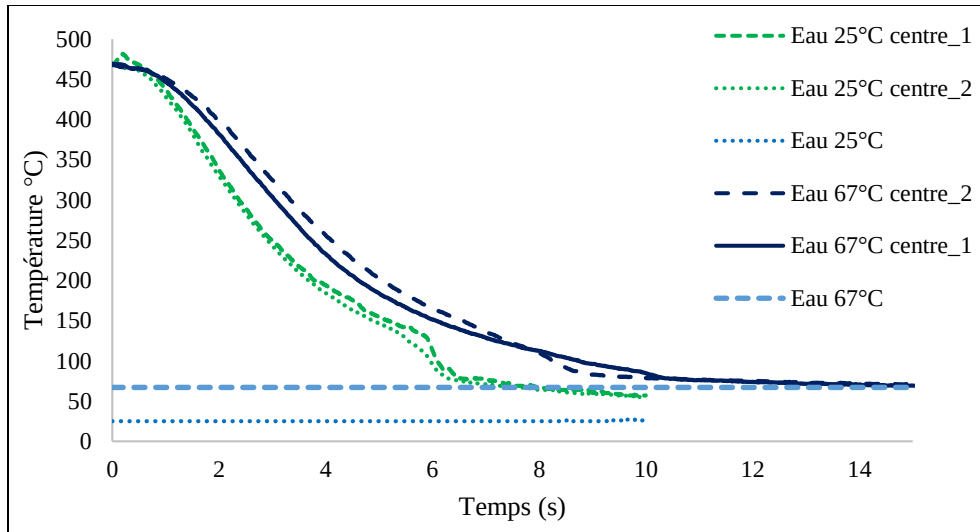


Figure 4 - 24 : Comparaison des évolutions de température selon la température de trempe au centre du cylindre (expérimental)

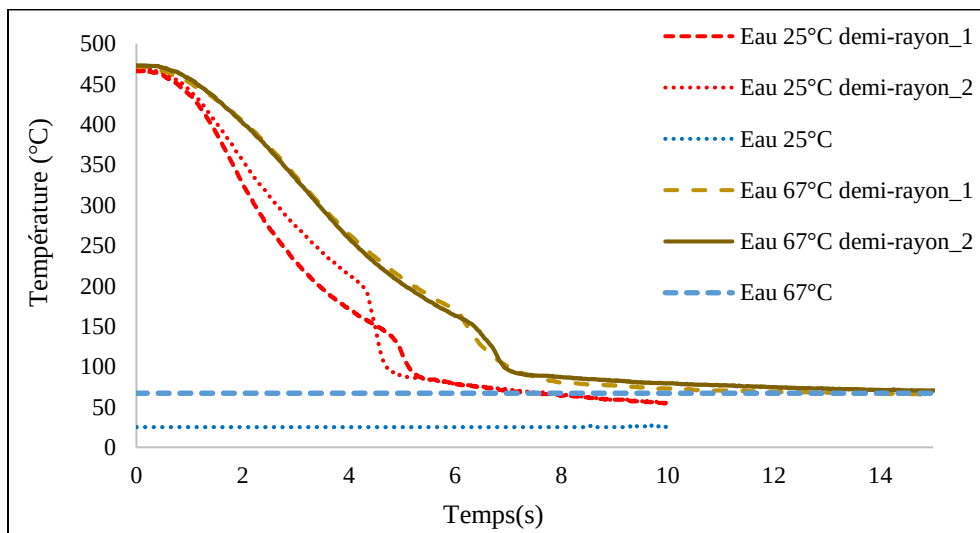


Figure 4 - 25 : Comparaison des évolutions de température selon la température de trempe au demi-rayon du cylindre (expérimental)

On remarque que l'effet de la réaction a quasiment disparu au centre de la pièce où le refroidissement est encore beaucoup plus lent que précédemment (figure 4-24). Au demi-rayon où la vitesse de refroidissement est plus élevée, elle reste encore visible (figure 4-25). Selon les observations, on peut donc établir une corrélation entre la vitesse de trempe

et le phénomène observé. Plus le refroidissement est lent, moins la chute de température est brusque.

Nous allons maintenant procéder à la comparaison des contraintes résiduelles selon les différents scénarios de trempe. Cette comparaison est intéressante en ce sens qu'elle permettra de déterminer si l'agitation du liquide de trempe a une influence significative sur les contraintes résiduelles.

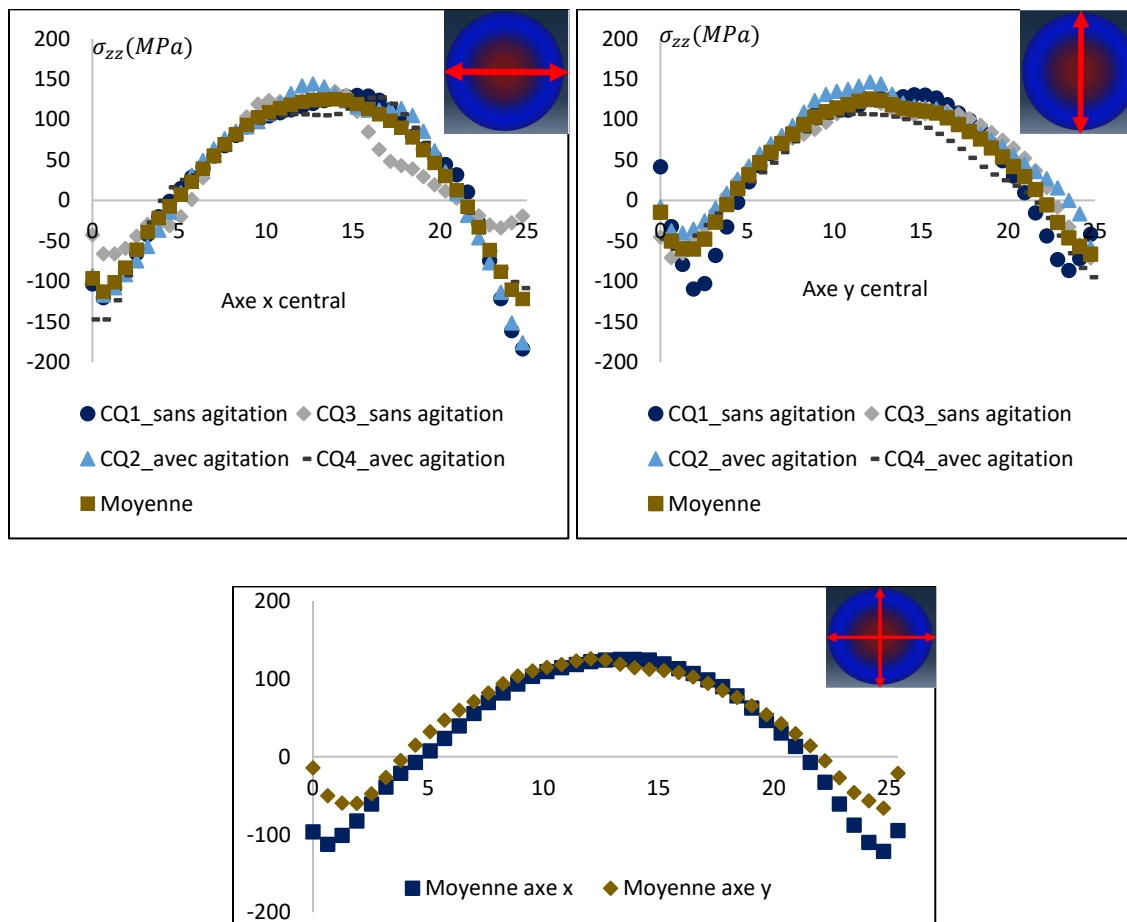


Figure 4 - 26 : Comparaison des courbes de contraintes résiduelles expérimentales sur l'axe x et l'axe y après la trempe à 25°C (*Écart-type expérimental : 21.2 MPa*)

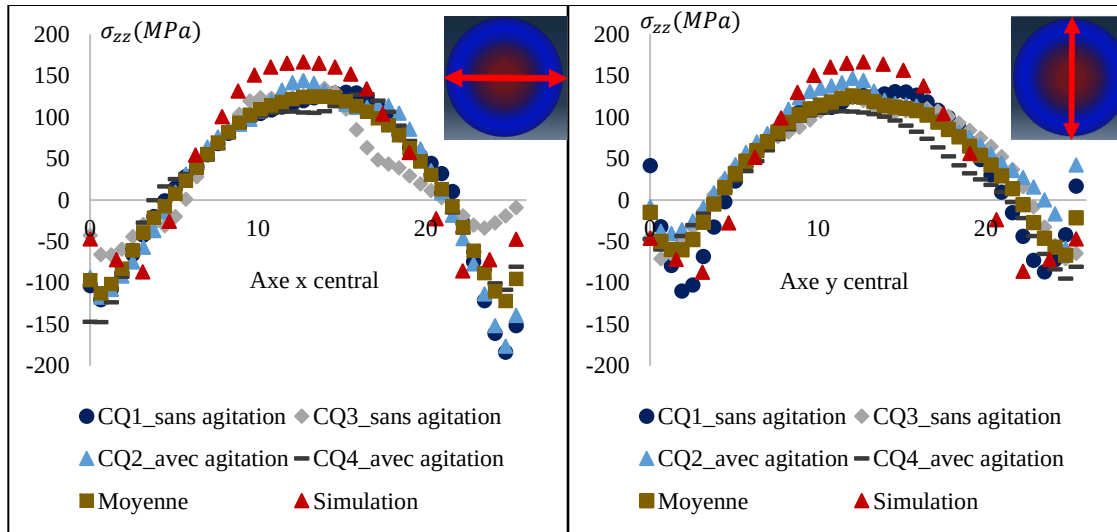


Figure 4 - 27 : Comparaison de la courbe de contraintes résiduelles expérimentales avec le résultat de simulation pour la trempe à 25°C

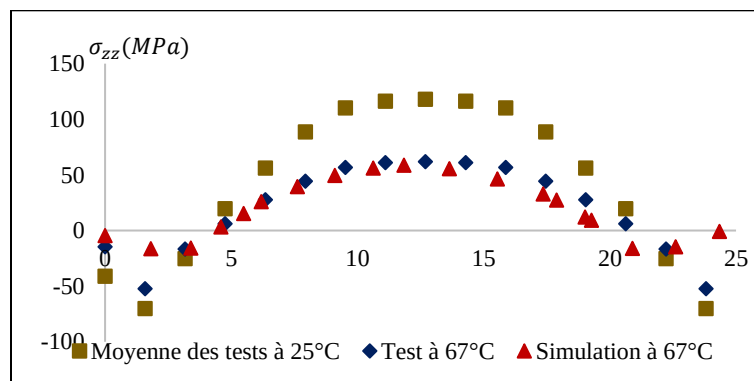


Figure 4 - 28 : Comparaison des contraintes résiduelles selon la température de trempe du cylindre

Une comparaison des résultats de trempe (trempe avec agitation, trempe sans agitation et simulation) nous amène aux conclusions suivantes :

- La distribution des contraintes est quasiment symétrique.
- En tenant compte de l'erreur sur les mesures de contraintes résiduelles par la méthode des contours discutée à la section 4.2.3 et les possibles variations des tests de trempes eux-mêmes, on peut conclure que dans le cas présent, l'agitation n'a pas grand effet sur les résultats (voir figure 4-26 et figure 4-27).

- En considérant l'écart type moyen sur les tests expérimentaux (21,2 MPa), on peut dire que la simulation reproduit bien le procédé de trempe : autant pour les profils de température que pour les contraintes résiduelles induites par la trempe.
- Par ailleurs, pour une température de trempe de 67°C, les contraintes résiduelles sont plus faibles d'environ de moitié que dans le cas de la trempe à 25 °C. Les contraintes résiduelles étant directement liées au gradient de température, en augmentant la température de trempe, on diminue de gradient et par le fait même les contraintes générées (figure 4-28).
- On remarque que la simulation reproduit moins bien les contraintes au niveau des bords du cylindre, nous reviendrons sur ce point à la section suivante 4.3.3.

Cette première étude nous a permis d'avoir une idée du profil de contraintes trouvé sur la partie cylindrique de la pièce simple (profil en cloche sur l'axe central). La prochaine section porte sur la trempe de la pièce simple. Ce cas de figure est plus complexe que pour le cylindre, les différentes formes et épaisseurs présentes au niveau de la pièce font que le coefficient de transfert thermique est différent d'un endroit à un autre. Il nous faut donc tenir compte de cette sensibilité. L'approche utilisée ici est de segmenter la pièce selon la position des trois thermocouples et d'y imposer le coefficient de transfert calculé dans chaque section.

En premier lieu, on présente les résultats expérimentaux et, en second lieu, les résultats de simulation suivis d'une comparaison.

4.3.3. Trempe sur la pièce forgée

La figure 4-29 illustre l'emplacement des thermocouples sur la pièce simple utilisés pour le suivi de l'évolution de la température.



Figure 4 - 29 : Position des thermocouples (1, 2 et 3) dans la pièce lors de la trempe ($T1$ = thermocouple de surface, $T2$ = thermocouple dans le cylindre et $T3$ = thermocouple au centre)

On présente en premier lieu les courbes de variation de la température lors de la trempe. On constate que le profil des courbes expérimentales et simulées est identique. En se basant sur ces résultats, on peut prédire que les profils de contraintes résiduelles devraient être semblables aussi.

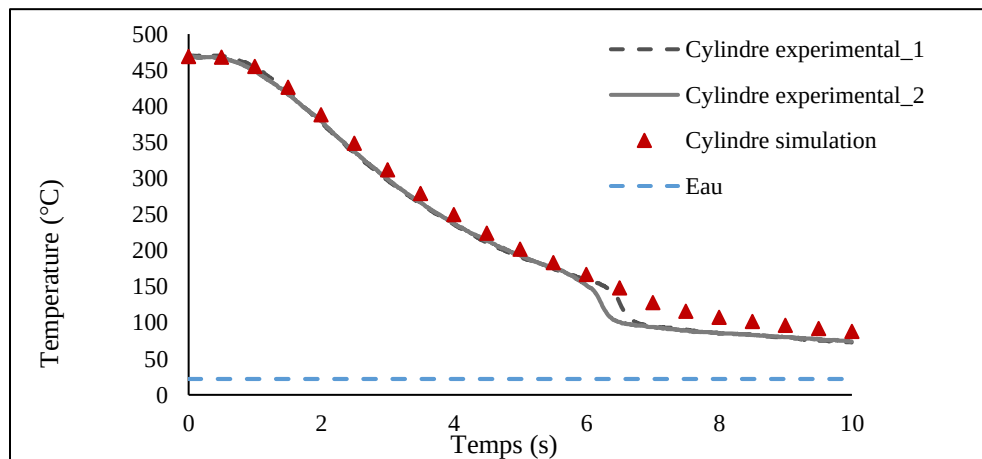


Figure 4 - 30 : Évolution de la température lors de la trempe : Thermocouple du cylindre (expérimental vs simulation)

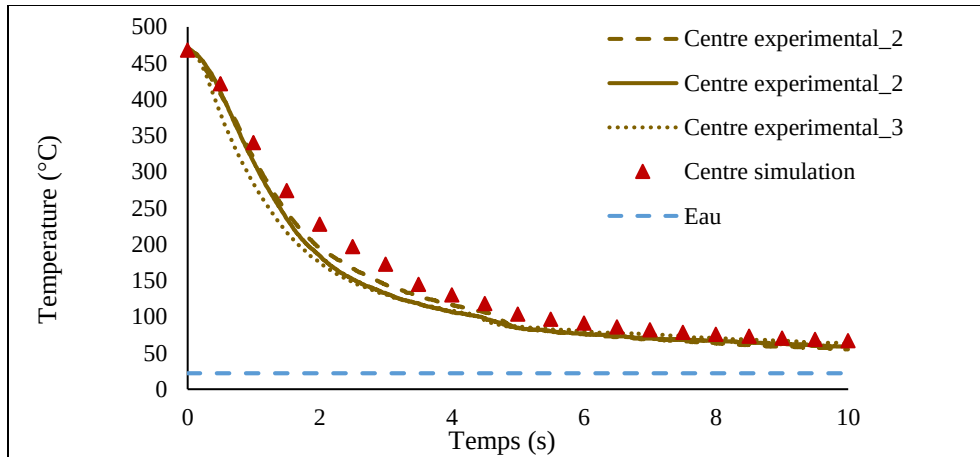


Figure 4 - 31 : Évolution de la température lors de la trempe : Thermocouple du centre (expérimental vs simulation)

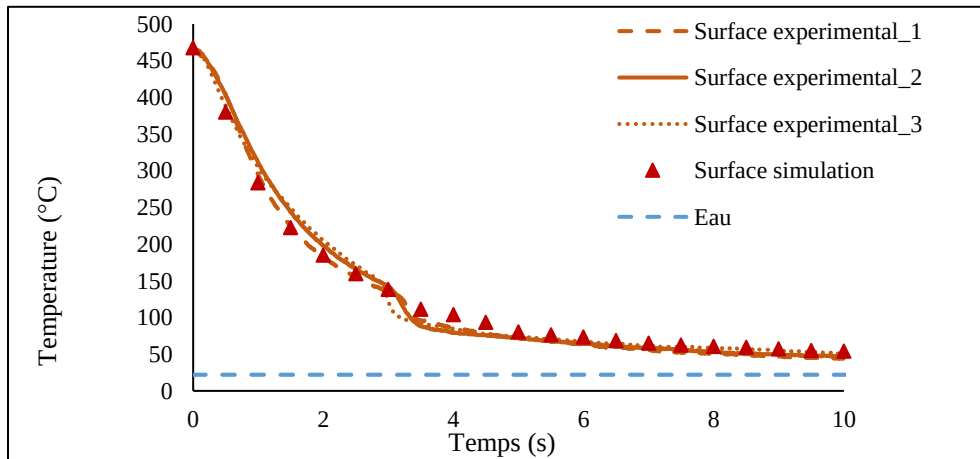


Figure 4 - 32 : Évolution de la température lors de la trempe : Thermocouple de surface (expérimental vs simulation)

Les courbes simulées (figures 4-30, 4-31, 4-32) reproduisent bien l'évolution de la température de la même manière que pour le cas des cylindres. On retrouve également le phénomène de chute de température se produisant toujours entre 100 et 150 °C. La présence de cette réaction dans la pièce simple aux températures situées entre 100 et 150 °C montre qu'elle n'est pas intrinsèque à la forme de la pièce, il s'agit d'une réaction liée au processus de trempe du matériau.

Si on observe la figure 4-31 (refroidissement de la section mince centrale de la pièce), autant l'expérimental que la simulation montrent que la chute de température est

quasi inexistante. Tel qu'énoncé dans le cadre des résultats de forgeage, cette partie de la pièce a un comportement singulier auquel nous n'avons pas d'explications précises (l'épaisseur ou de possibles transformations métallurgiques peuvent entrer en ligne de compte).

Les figures 4-33, 4-34, 4-35 et 4-36 ci-dessous donnent les contraintes résiduelles après forgeage et traitement thermique.

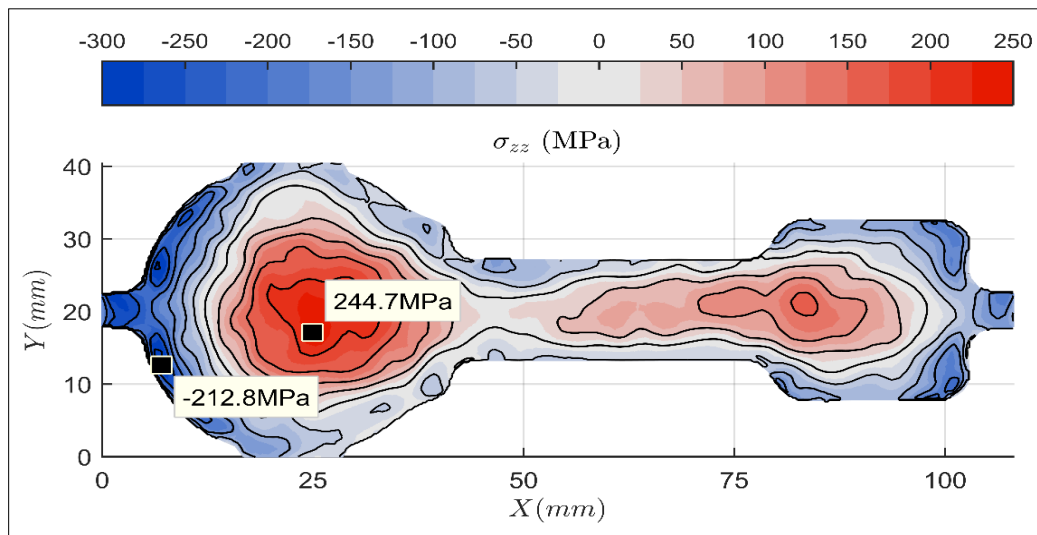


Figure 4 - 33 : Position des contraintes maximale et minimale dans la section de coupe Q1 (trempé sans agitation)

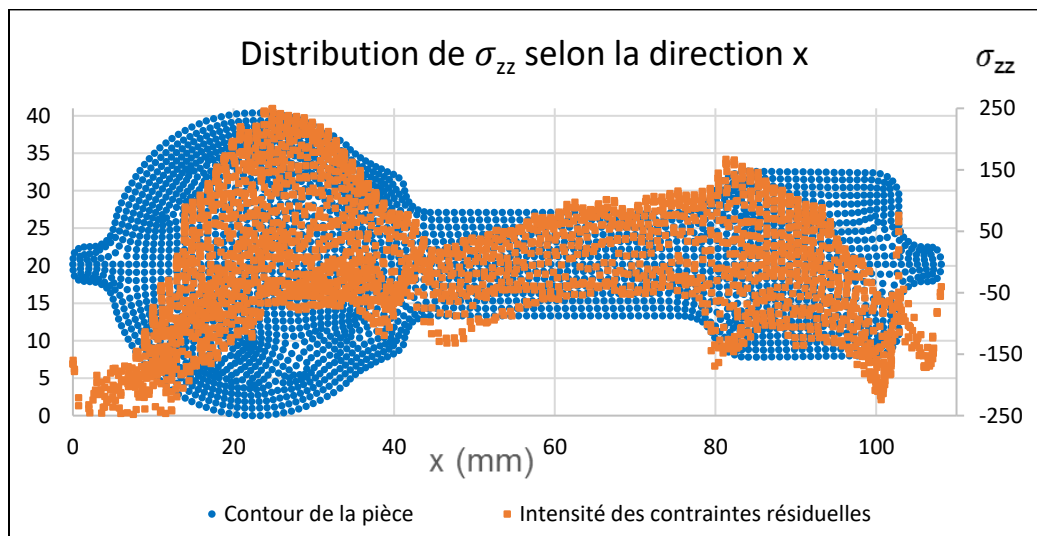


Figure 4 - 34 : Contraintes résiduelles le long de l'axe horizontal dans la section de coupe Q1 (trempé sans agitation)

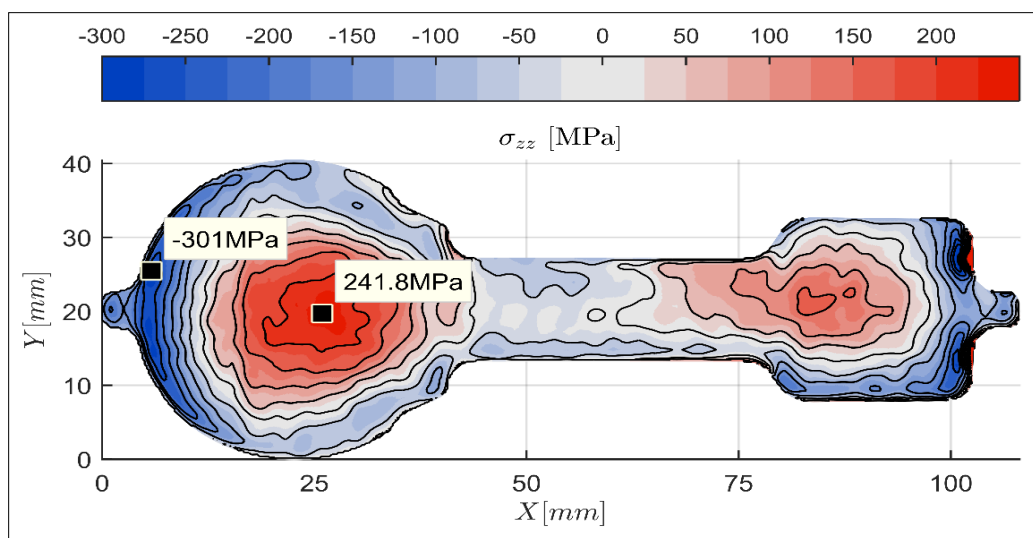


Figure 4 - 35 : Position des contraintes maximale et minimale dans la section de coupe Q2 (trempé avec agitation)

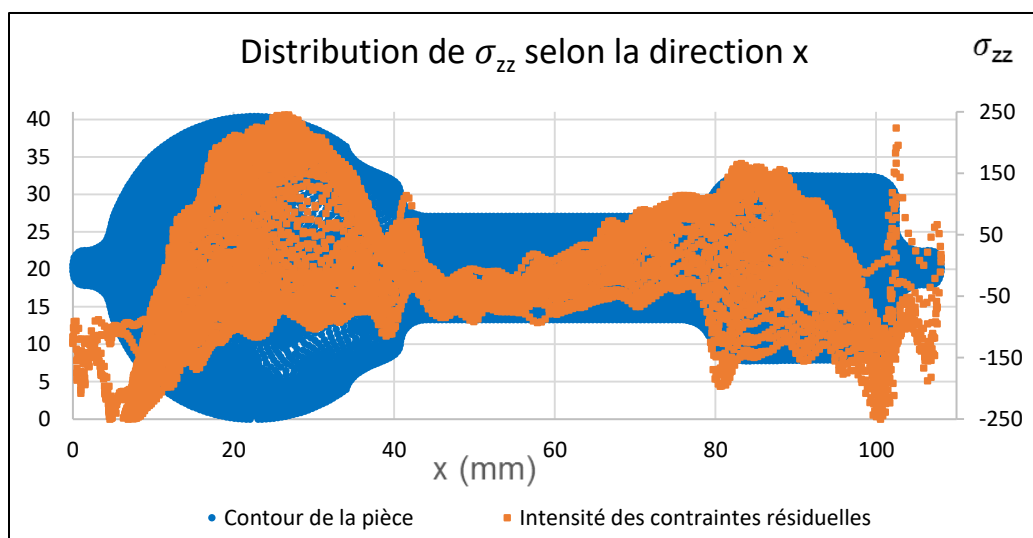


Figure 4 - 36 : Contraintes résiduelles le long de l'axe horizontal dans la section de coupe Q2 (trempé avec agitation)

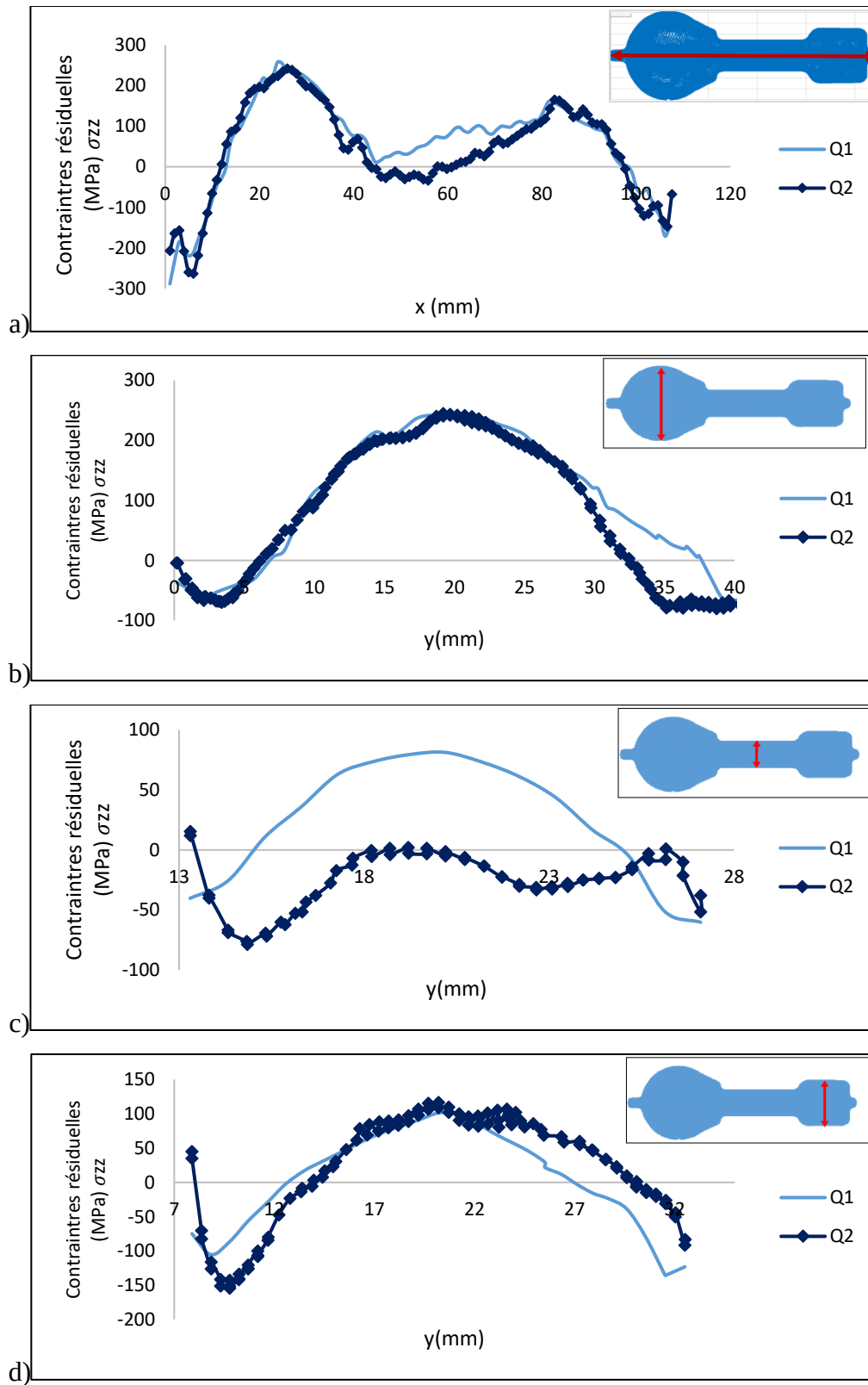


Figure 4 - 37 : Comparaison expérimentale des valeurs de contraintes résiduelles de trempe sur différentes sections

Les résultats expérimentaux présentent un écart type de 23,75 MPa sur l'axe central de la pièce, et respectivement 25,81 MPa, 43 MPa et 40,73 MPa sur les sections verticales considérées (figure 4-37).

On constate par ailleurs que les résultats avec ou sans agitation sont similaires conformément aux résultats obtenus avec le cylindre. Donc, l'utilisation d'un bain agité n'est pas nécessaire dans ce cas.

Le résultat de simulation de la trempe est donné à la figure 4-38. On procède également à une comparaison graphique de tous les résultats (figure 4-39).

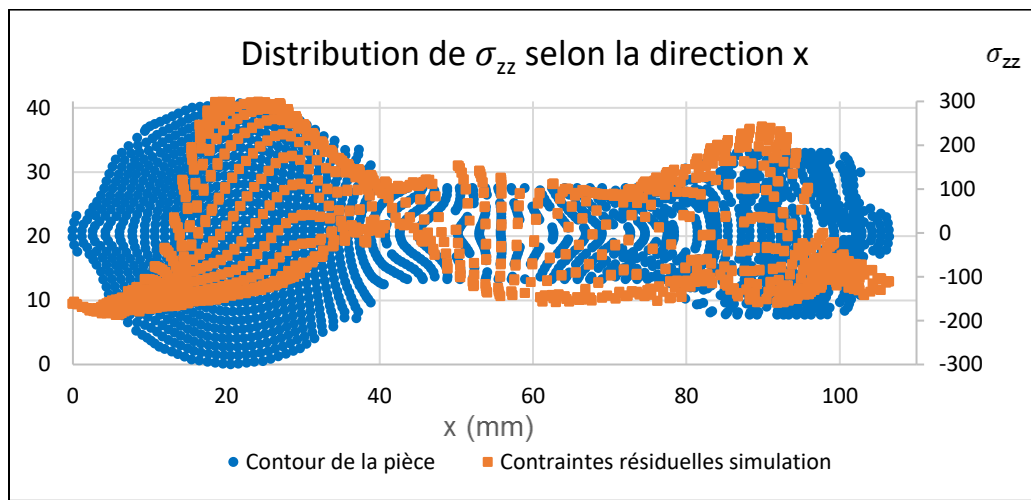


Figure 4 - 38 : Résultat simulé (Johnson-Cook classique) : Intensité et distribution des contraintes résiduelles S33 (σ_{zz})

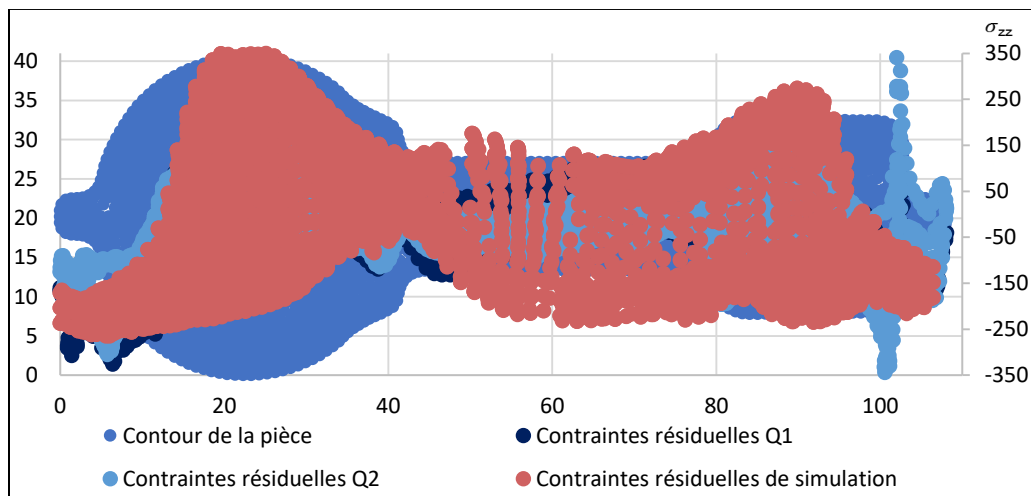


Figure 4 - 39 : Comparaison : expérimental versus simulation pour les cas de trempe

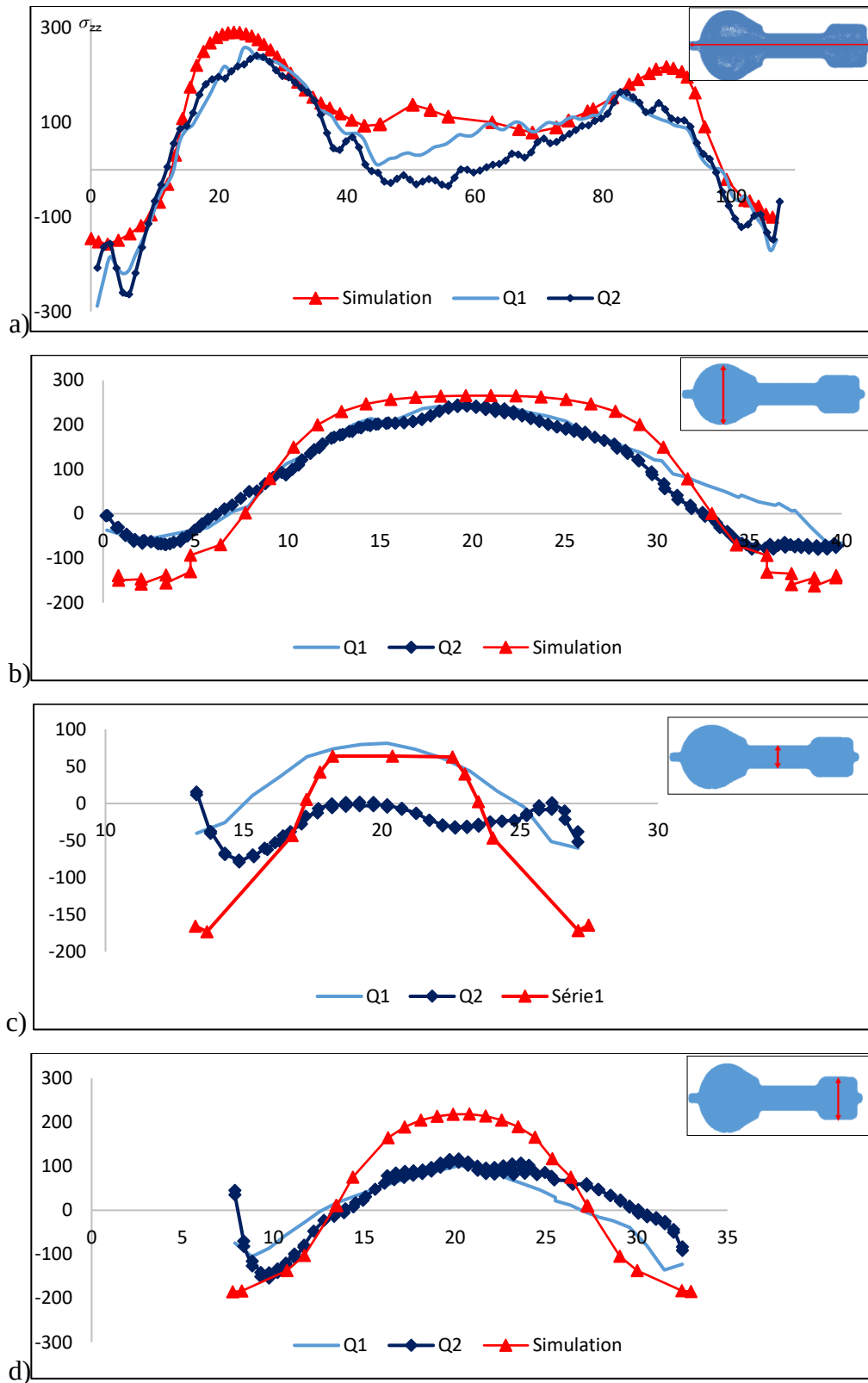


Figure 4 - 40 : Comparaison expérimental versus simulation des valeurs de contraintes résiduelles de trempe selon différentes sections

La figure 4-40 montre d'une part que la simulation est reproductrice de l'expérimental notamment lorsqu'on prend en compte les écarts calculés expérimentalement. D'autre part, le centre de la pièce a un comportement singulier, comme nous l'avons remarqué dans le cas des contraintes résiduelles après forgeage. Autant au niveau des deux tests expérimentaux que comparativement à la simulation, le centre de la pièce présente des niveaux de contraintes résiduelles différents. Cette particularité est peut-être due à l'épaisseur de la pièce à cet endroit (la plus faible de toute la pièce excluant les bavures soit 14,2 mm comparativement à 40,8 mm pour le cylindre et 25,2 mm pour le reste de la pièce) combinée à la direction de la trempe (selon que le centre est immergé plus vite ou plus lentement). En effet, Chobaut [C10] suggère que la présence de précipité lors de la trempe peut entraîner une augmentation des contraintes résiduelles à la surface.

Si on s'intéresse maintenant aux contraintes résiduelles de trempe elles-mêmes, on remarque que par rapport aux mesures après forgeage il y a une augmentation de l'intensité des contraintes assez significative, environ 230 MPa au niveau du cylindre notamment (figure 4-41 a) et b)). La trempe se faisant plus rapidement, le matériau se contracte beaucoup plus vite au contact de l'eau, ce qui entraîne des contraintes internes plus élevées. Il s'agit principalement de contraintes en tension à l'intérieur et de contraintes en compression en surface. Le fait d'avoir des contraintes de compression introduites dans la pièce par la trempe est un avantage en ce sens qu'elles augmentent la limite d'endurance du matériau [B5] et bloquent les fissures [D5]. En effet, les ruptures par fatigue se produisent lorsqu'il y a progression d'une fissure dans la pièce et cette progression se fait lorsque des contraintes de traction agissent à la pointe de la fissure ; les contraintes de compression tendent à fermer la fissure et à freiner sa progression [D5]. Par ailleurs, les contraintes résiduelles de compression sont souvent bénéfiques, car les pièces subissent généralement en service des efforts de traction, dont l'effet est ainsi diminué par l'addition algébrique des contraintes résiduelles de compression [S2].

Il est à noter également que la partie interne de la pièce étant soumise à des contraintes de tension, un enlèvement de matière au niveau de la partie interne pourrait conduire à un relâchement du matériau (rééquilibrage des contraintes) et par le fait même à une expansion de la pièce.

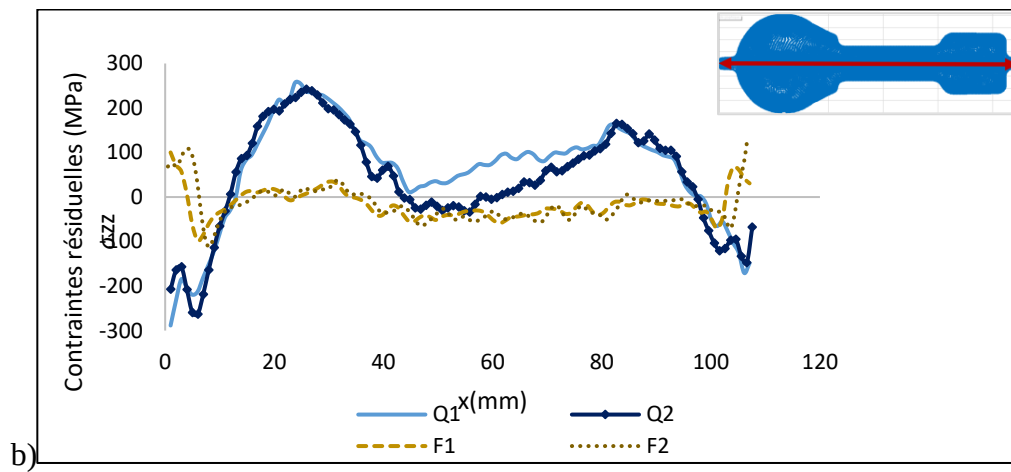
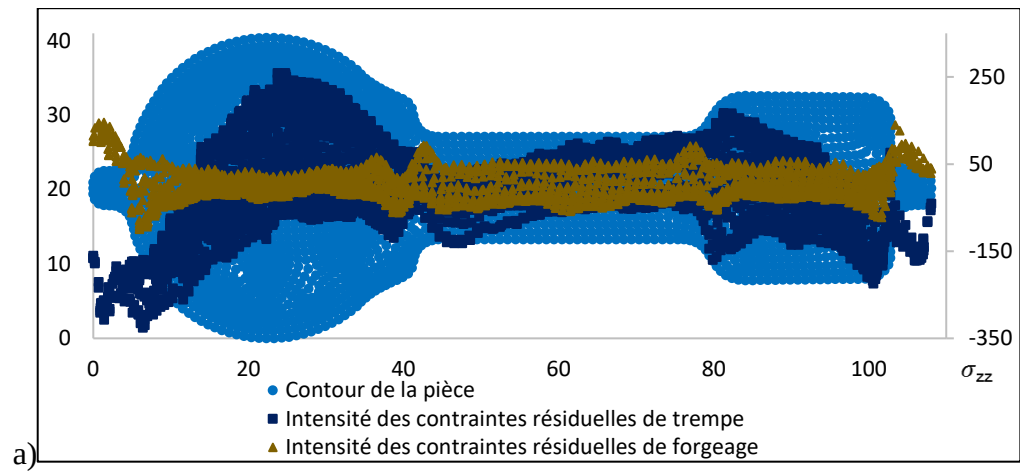


Figure 4 - 41 : Comparaison des contraintes résiduelles de forgeage avec les contraintes résiduelles de trempe (Q1 : échantillon forgé et trempé 1, Q2 échantillon forgé et trempé 2, F1 : échantillon forgé 1, F2 : Échantillon forgé 2)

4.4. Conclusion

Dans ce chapitre, l'analyse des contraintes résiduelles après forgeage et après la trempe a été effectuée. On a pu conclure que la pièce est sujette à des contraintes de compression en surface après la trempe qui sont souhaitables dans le cas présent en ce sens qu'elles bloquent la progression de fissures potentielles dans la pièce.

Les simulations ont montré que les modèles de comportement (Johnson-Cook et Johnson-Cook modifié) ne reproduisent pas très bien les états des contraintes au niveau des sections minces et des bords de la pièce. Dans le premier cas, cela peut découler du fait que la simulation ne reproduit pas exactement la séquence (selon que le centre est immergé vite ou lentement lors de procédure) de trempe combiné aux effets possible de transformations métallurgiques non simulées. Dans le second, les écarts seraient imputables aux artefacts de coupe de la méthode des contours.

L'ensemble des développements (modélisation du matériau et du procédé) effectués jusqu'ici a permis de comprendre le comportement de l'alliage d'aluminium 7175 et de modéliser le forgeage à chaud en matrices fermées. La finalité de tout ce travail étant d'intégrer l'ensemble du processus dans la mise en forme de la composante du train d'atterrissage, nous allons consacrer le prochain chapitre à l'extension de la méthodologie développée à la pièce industrielle.

Chapitre 5

Application sur le modèle industriel

Dans ce chapitre, on présente les simulations de forgeage multi-étapes de la pièce industrielle, son refroidissement et les résultats de contraintes résiduelles. Il est à noter que ce chapitre ne comporte pratiquement pas de résultats expérimentaux puisque nous n'en disposons que peu. Quelques comparaisons avec les résultats de la pièce simple seront présentées.

5.1. Introduction

Un des buts ultimes de ce projet est de pouvoir intégrer l'ensemble de la méthodologie de modélisation du forgeage développée précédemment dans la mise en forme de la composante du train d'atterrissage. Ainsi, on tente dans le présent chapitre de voir s'il est possible d'étendre du moins partiellement cette méthodologie à l'étude de la composante industrielle.

Ainsi, on présente :

- les simulations numériques de la composante industrielle,
- l'étude du refroidissement,
- la simulation et l'étude des contraintes résiduelles et
- une comparaison des résultats de la composante industrielle avec les résultats de la pièce simple

L'ensemble des propriétés géométriques ainsi que les conditions de mise en forme de la pièce industrielle ont déjà été prédéfinies au chapitre 3.

La modélisation des matrices de forgeage a été effectuée dans Abaqus v6.14. Les matrices de finition ont été obtenues à partir de la pièce finie en allant directement récupérer l'enveloppe externe de la pièce importée de CATIA juste à la fin de l'étape de forgeage de finition. Quant aux matrices de préformage nous avons peu d'informations à leur sujet, donc nous nous sommes basés sur des règles empiriques de design (figure 5-1 et tableau 5-1) tirées de «Handbook of workability and process design» [D3] utilisées afin de dimensionner les préformes. Tel qu'on peut le voir au tableau 5-1, des rapports de dimensions (distance, arrondis, profondeur etc.) entre la pièce préformée et celle finie sont établies pour permettre un écoulement adéquat de la matière à travers les cavités des matrices. On peut voir les matrices de préforgeage et de finition aux figures 5-2 et 5-3.

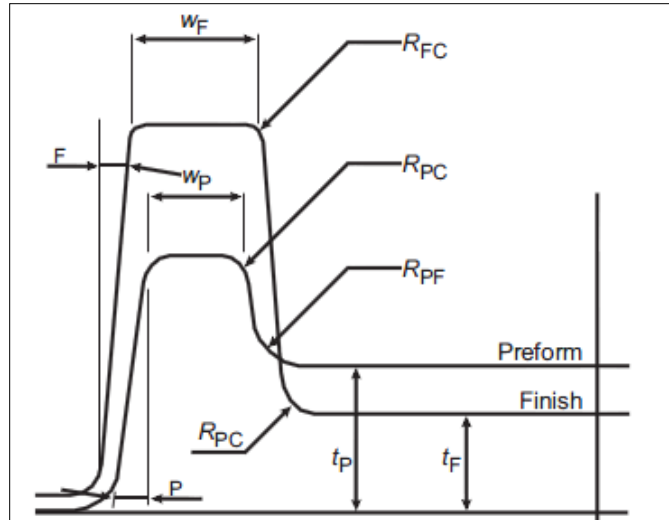


Figure 5 - 1 : Comparaison de la pièce préformée et finie pour un quart d'une section H [D3].

(α_F , angle de dépouille final ; α_P , angle de dépouille de la préforme ; w_F , largeur de forgeage ; w_P , la largeur de la préforme ; R_{FC} , rayon d'angle de forgeage ; R_{PC} , rayon de l'angle de la préforme ; R_{PC} , rayon du congé de la préforme ; t_P , l'épaisseur de la préforme ; t_F , l'épaisseur de la pièce finale.)

Tableau 5 - 1: Dimensions de préformage pour un alliage d'aluminium (nervure) [D3]

Dimensions finales de forgeage	Dimensions de préformage
t_F	$t_P \cong ((1,1 \text{ à } 1,5) * t_F)$
R_{FF}	$R_{PF} \cong ((1,2 \text{ à } 2) * R_{FF})$
R_{FC}	$R_{PC} \cong ((1,2 \text{ à } 2) * R_{FC})$
α_F	$\alpha_P \cong \alpha_F + (2 \text{ à } 5^\circ)$
w_F	$w_P \cong w_F - 0,8 \text{ mm}$

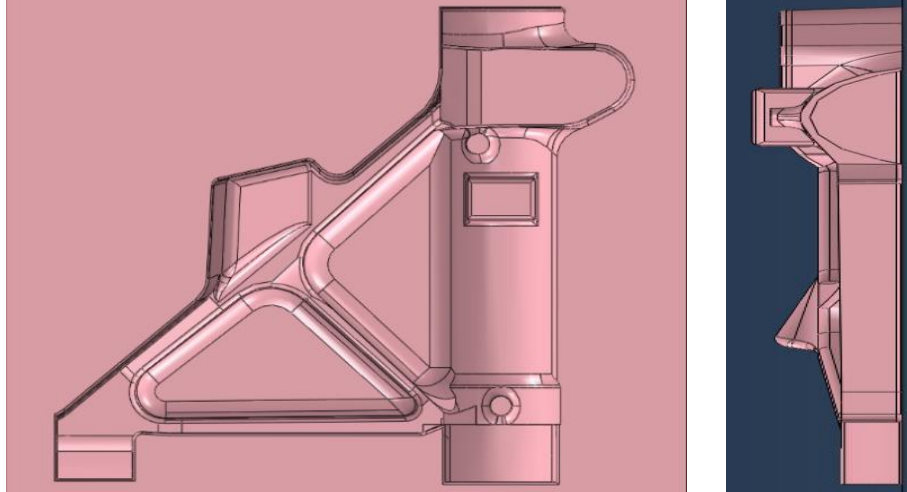


Figure 5 - 2 : Matrice de préforgeage modélisée avec Abaqus 6.14

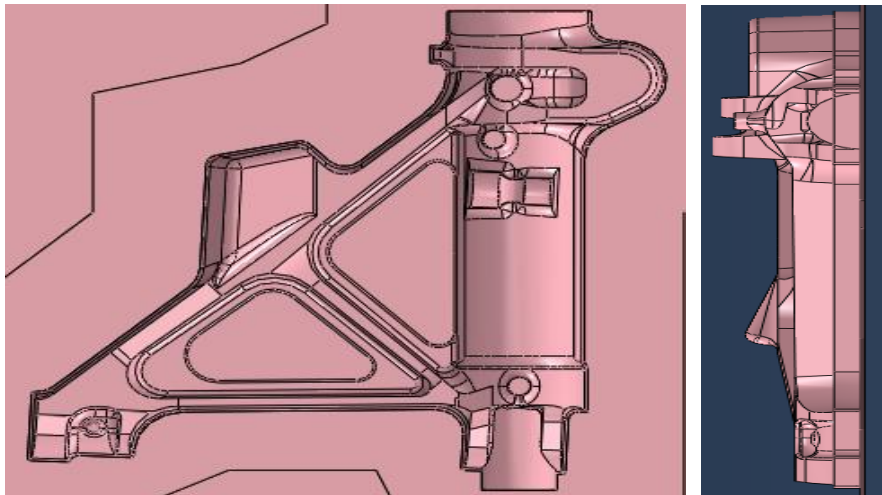


Figure 5 - 3 : Matrice de finition modélisée avec Abaqus 6.14

5.2. Simulation du forgeage avec la méthode CEL

Conformément à la méthodologie énoncée et utilisée pour la pièce simple, nous allons simuler le forgeage de la pièce industrielle avec la méthode CEL. Pour cela, nous avons utilisé un volume de contrôle de 1221920 éléments afin de bien capter les épaisseurs fines de la pièce. Un maillage grossier entraîne une mauvaise visualisation des résultats durant la simulation (voir figure 5-4).

Comme cela a été discuté pour le cas de la pièce simple, la simulation en CEL ne pose aucun problème de distorsion du maillage, même avec des niveaux de déformation

extrêmement élevés pouvant aller jusqu'à plus de 900% sur les sections minces de la pièce (voir figure 5-4).

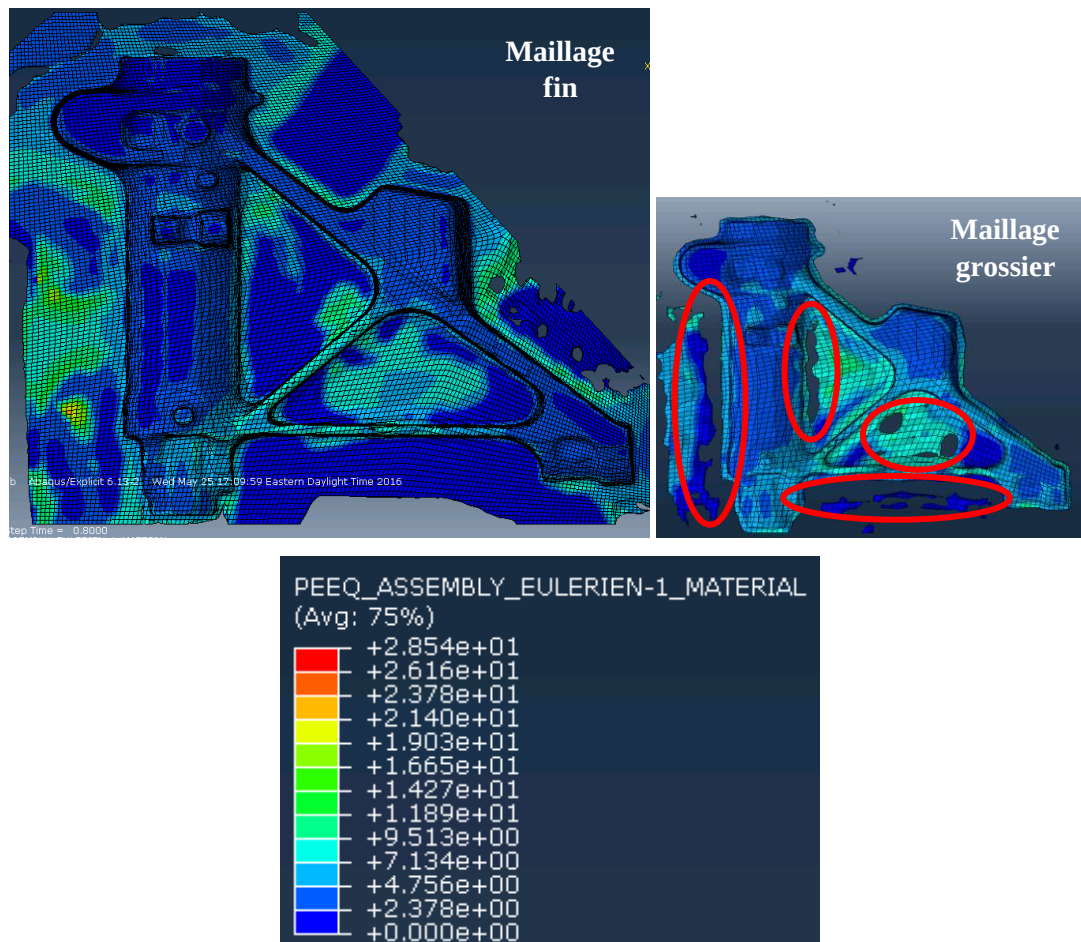
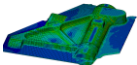


Figure 5 - 4 : Niveau de déformation plastique atteint lors du forgeage de finition

Tableau 5 - 2: Rappel des conditions de forgeage

Étape de préforgeage	Étape de forgeage de finition
$T_{matrices} = 382^{\circ}\text{C}$ $T_{pièce} = 400^{\circ}\text{C}$ $V = 12,7\text{mm} / \text{s}$ Forme de départ (billette cylindrique 111,51mm x 596,9mm)  Temps de simulation ~19h	$T_{matrices} = 382^{\circ}\text{C}$ $T_{pièce} = 400^{\circ}\text{C}$ $V = 12,7\text{mm} / \text{s}$ Forme de départ (préforme)  Temps de simulation ~ 50h25mm

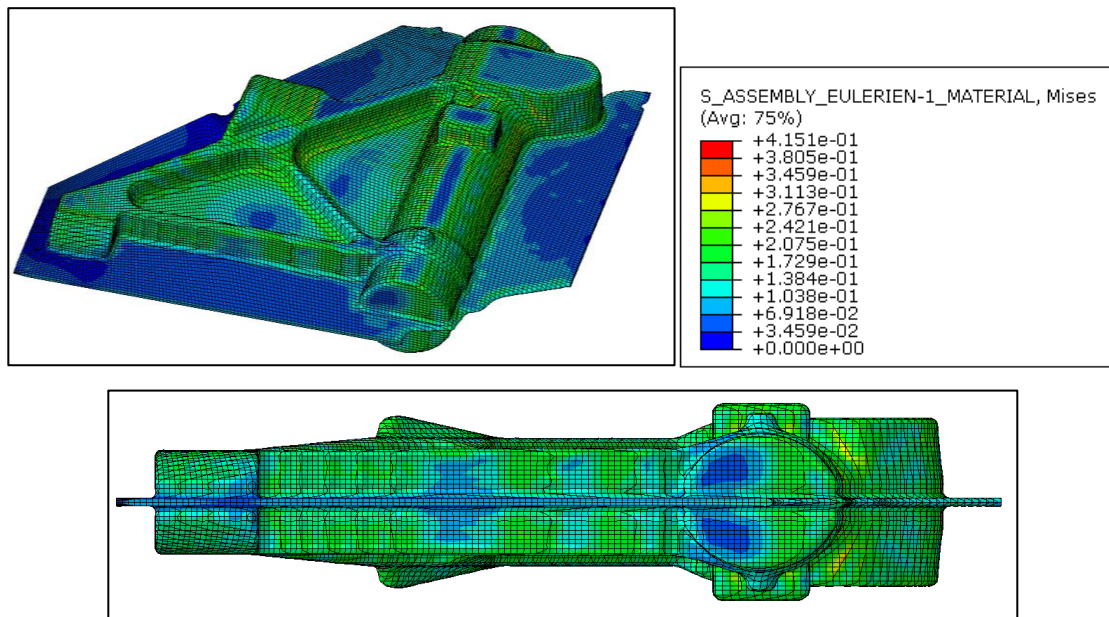


Figure 5 - 5 : Résultats de simulation à l'étape de préforgeage

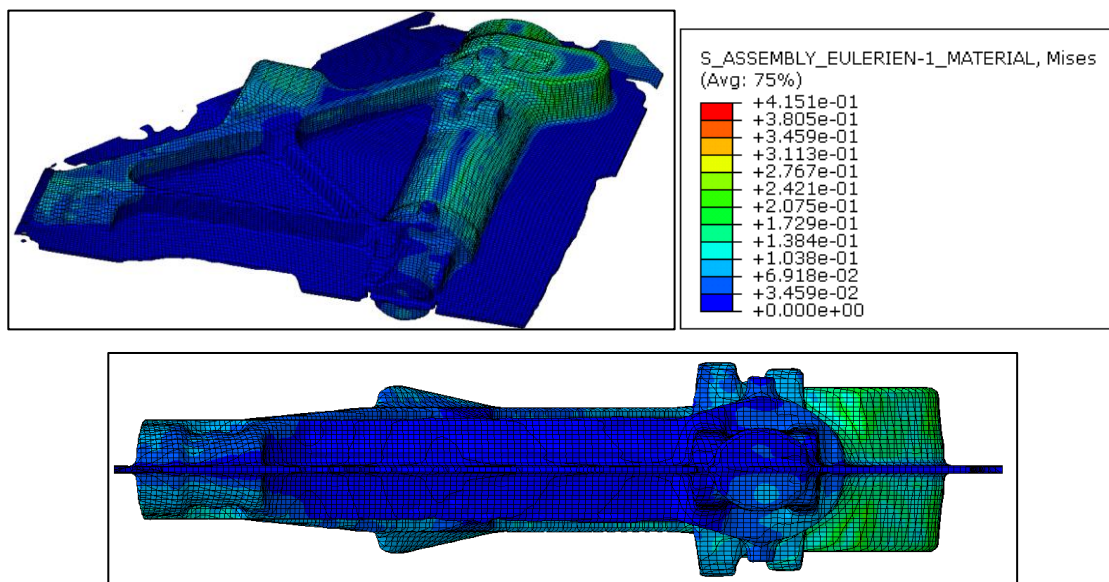


Figure 5 - 6 : Résultats de simulation à l'étape finale

En se basant sur le tableau 5-2, on peut noter que les coûts de calcul de la pièce industrielle sont importants. Des ressources et du temps considérables auraient été nécessaires si nous avions exclusivement travaillé sur la pièce industrielle à cause des études paramétriques et du travail itératif que nécessitent certaines simulations.

Ce qui vient donc appuyer la pertinence de l'utilisation de la pièce simple pour développer la méthodologie de modélisation du procédé de forgeage à chaud en matrices fermées. De plus, tel qu'énoncé au chapitre 3, nous n'avons pas tous les paramètres du procédé industriel et il nous est impossible d'obtenir autant d'information pour ce procédé que dans le cas de notre procédé instrumenté (courbes de force-déplacement, température interne de la pièce lors du forgeage, contraintes d'écoulement lors du forgeage, etc.).

Par ailleurs, la simulation de la pièce industrielle permet de distinguer la distribution des contraintes sur les différentes zones notamment la partie cylindrique qui présente les contraintes les plus élevées. Un retour sera fait à ce niveau lors de l'étude des contraintes résiduelles importantes à prédire sachant que la pièce sera soumise à des opérations subséquentes de mise en forme (usinage, traitement thermique, etc.). Mais avant cela, nous allons faire l'étude du refroidissement de la pièce après préforgeage et voir son effet sur ses propriétés.

5.3. Cas du refroidissement de la pièce industrielle

Le refroidissement de la pièce industrielle après préforgeage se fait à l'air libre en dehors des matrices de forgeage comme pour le cas de la pièce simple. Cependant, comme la pièce industrielle est plus massive et complexe que la pièce simple, son refroidissement s'opère donc de manière différente. En effet, on observe différentes vitesses de refroidissement qui vont éventuellement conduire à d'éventuelles contraintes résiduelles causées par la présence d'un certain gradient thermique. Donc, en plus des contraintes résiduelles mécaniques qui résultent du forgeage, il faudra tenir compte des contraintes thermiques. Du point de vue numérique, cela se traduit à notre niveau par une analyse des contraintes juste après la première étape de forgeage ou préforgeage et après le refroidissement. On peut ainsi quantifier les contraintes résiduelles induites par le gradient thermique. Ci-dessous on observe les courbes de refroidissement numérique de différents points de mesure à la surface de la pièce et à l'intérieure du cylindre (figure 5-7).

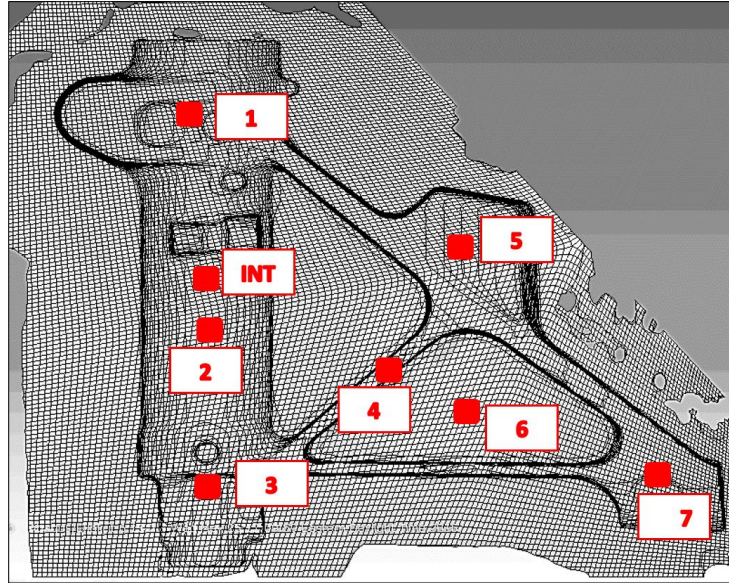


Figure 5 - 7 : Positions des différents points de mesure de la température

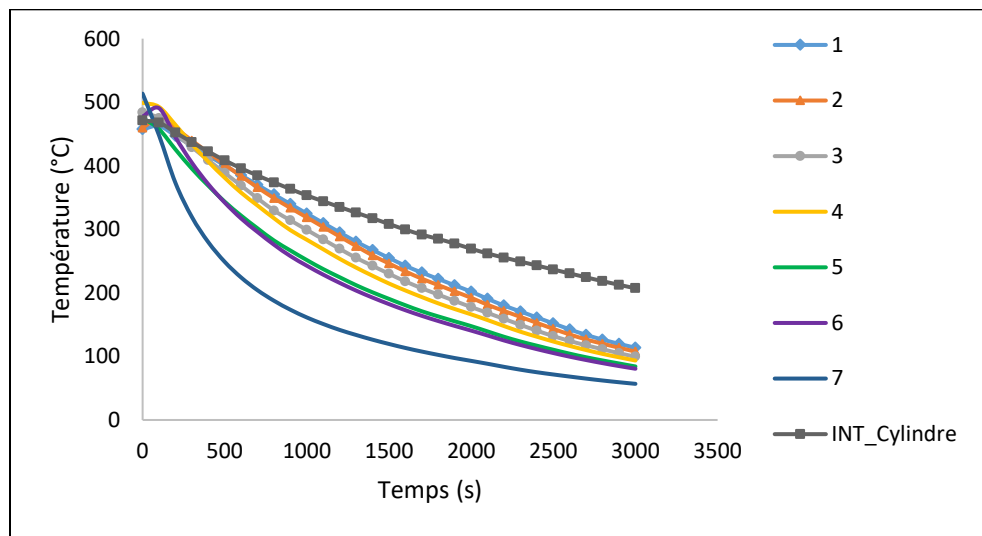


Figure 5 - 8 : Courbes de refroidissement de la pièce industrielle

Les points 1, 2 et 3 se trouvent sur la surface du cylindre du train d'atterrissage à différents endroits comme on peut le voir à la figure 5-7 et le point INT_cylindre donne l'évolution de la température au centre du cylindre. Les points 4, 5, 6 et 7 sont également en surface aux endroits indiqués sur la figure 5-7.

Bien que nous n'ayons pas de résultats expérimentaux pour valider cette simulation, les résultats obtenus semblent cohérents vis-à-vis de la forme de la pièce. En effet, comme

le montre la figure 5-8, le point INT_cylindre refroidit moins rapidement à cause de son emplacement à l'intérieure du cylindre, le point 7 refroidit plus rapidement étant donné qu'il se trouve sur une section mince et proche du bord de la pièce et à la surface (la surface de refroidissement par volume est importante). Moins influencé par le reste de la pièce, son refroidissement se fait alors plus rapidement. Quant au reste des points de mesure, leurs courbes de refroidissement sont quelque peu similaires. En excluant le centre du cylindre qui refroidit beaucoup moins vite que les autres points pris en surface, on dénote une différence de température maximale de près de 157°C autour de 1000s après le début du refroidissement et de près de 57°C vers la fin du refroidissement (autour de 3000s). L'aluminium ayant une forte conductivité thermique, le refroidissement se fait relativement vite. Ainsi, à la différence de la pièce simple dont l'étude du refroidissement avait révélé une absence de gradient thermique lors du refroidissement après forgeage, le gradient thermique observé au niveau de la pièce industrielle pourrait être à l'origine de contraintes résiduelles thermiques.

5.4. Analyse des contraintes résiduelles

Cette étape de simulation permet de connaître l'état des contraintes résiduelles après refroidissement suite à l'étape de préforgeage. Ci-dessous (figure 5-9), les résultats de contraintes résiduelles dans la pièce après préforgeage à différents endroits en surface. Une analyse des contraintes à travers l'épaisseur à quelques endroits sur la pièce sera présentée par la suite (figure 5-11).

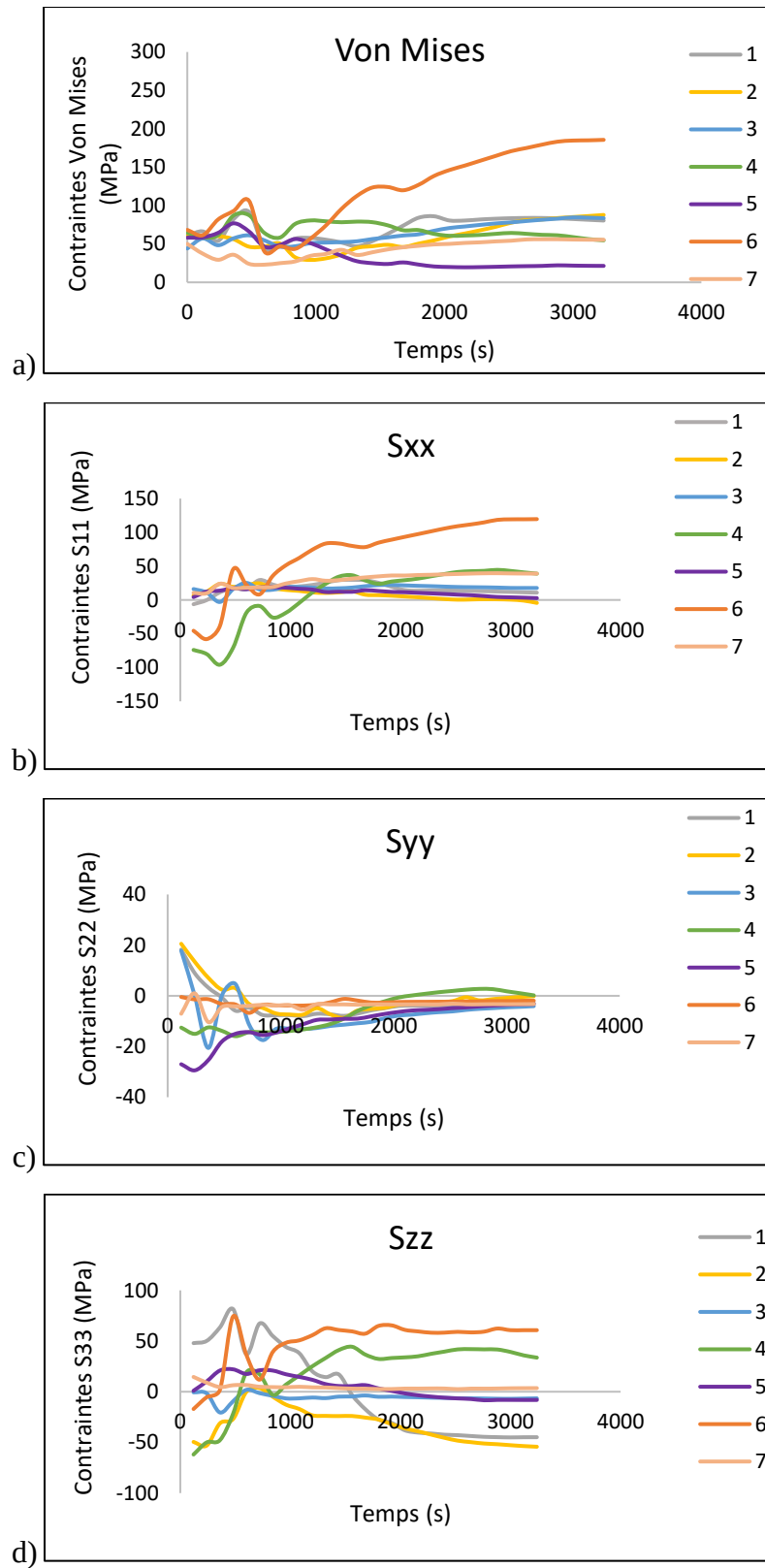


Figure 5 - 9 : Évolution des contraintes lors du refroidissement selon les points de la figure 5-7.

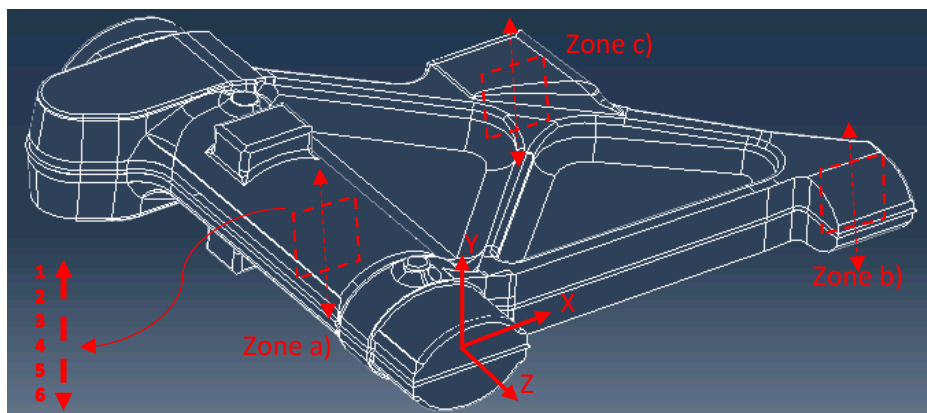


Figure 5 - 10 : Zones et points de mesures des contraintes S_{zz} à travers l'épaisseur.

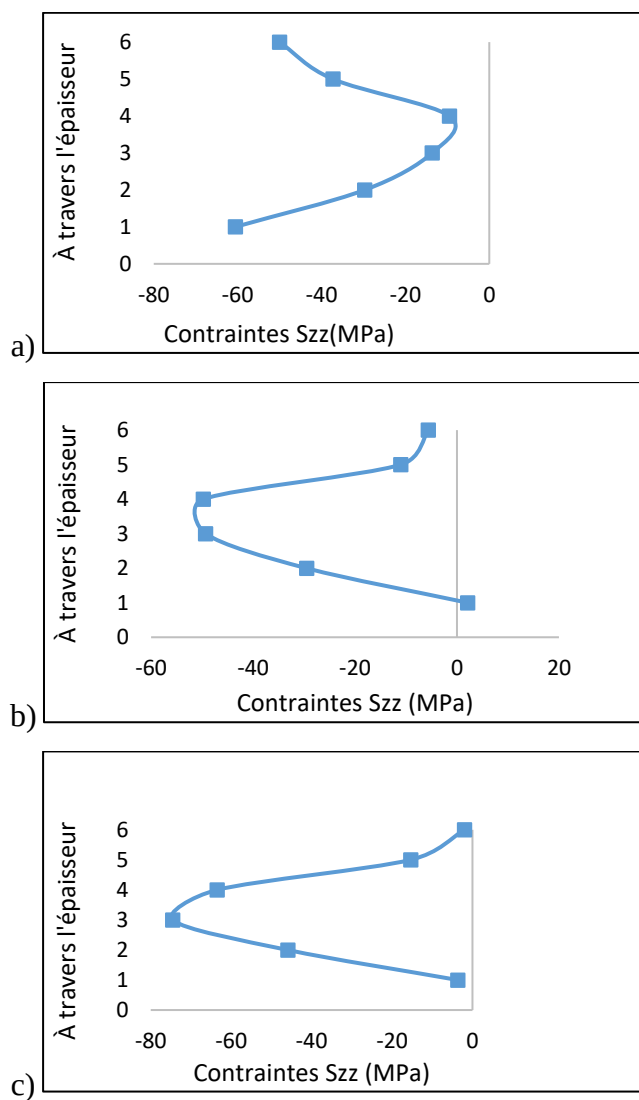


Figure 5 - 11 : Profil des contraintes résiduelles S_{zz} à travers l'épaisseur à quelques endroits après préforage

L'étude considérée ici ne tient compte que de l'effet du refroidissement (seule l'expansion thermique du matériau est considérée dans le modèle, l'effet de la formation des précipités n'est pas pris en compte par exemple) sur les contraintes mécaniques.

On remarque sur la figure 5-9 une stabilisation des contraintes autour de $t=2000s$, ce qui correspond à des températures variant entre $200^{\circ}C$ au point 1 (plus lente vitesse de refroidissement) et $93^{\circ}C$ point 7 (plus rapide vitesse de refroidissement).

Par ailleurs, on observe que les contraintes dans la direction z (figure 5-11 a)) sont plus en compression en surface au niveau du cylindre à la fin du refroidissement pour l'étape de préforgeage. Au niveau des figures 5-11 b) et c) c'est l'inverse qui est observé. En guise d'explication, on pense qu'il s'agit de l'effet du gradient thermique (voir figure 5-12 : courbes typiques de refroidissement des différentes zones) à travers la pièce. En effet, les zones b) et c) refroidissent plus vite que le reste de la pièce et se contractent en premier, ce qui entraîne une réaction inverse au niveau de la suite la zone a) pour équilibrer les contraintes dans la pièce.

Quant aux profils des contraintes à travers les épaisseurs (profil en cloche), elles sont en accord avec ce qui est attendu, ce qui est observable au niveau de la littérature et au niveau de la pièce simple (voir figure 5-13).

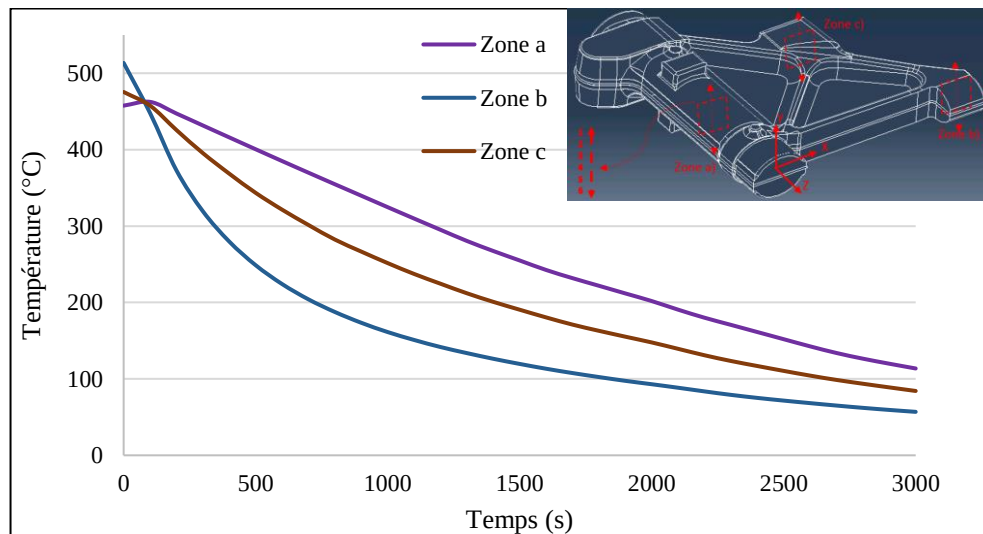


Figure 5 - 12 : Courbes typiques de refroidissement des zones a), b) et c).

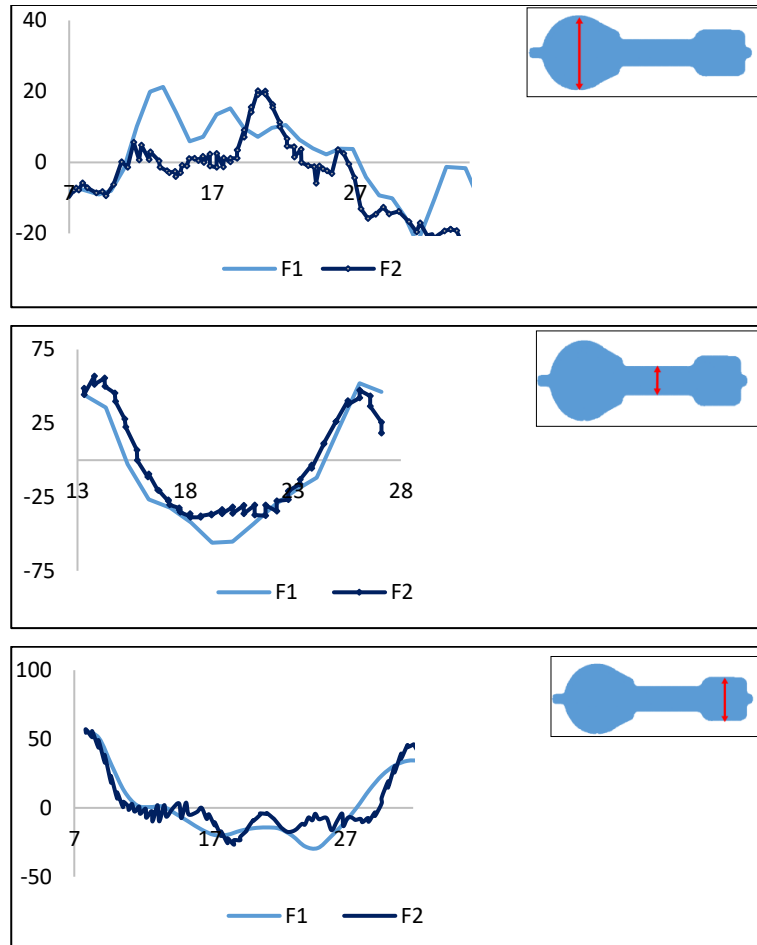


Figure 5 - 13 : Profils expérimentaux de contraintes S33 à travers différentes épaisseurs de la pièce simple.

Toutefois, puisqu'il ne s'agit pas de l'état final de la pièce nous ne pouvons pas tirer de conclusions significatives. En effet, une étape de forgeage finale, suivie d'étapes d'usinage et de traitement thermique sont prévues et chacune de ces étapes aura une influence sur l'état des contraintes.

5.5. Comparaison des propriétés de la pièce industrielle avec celles de la pièce simple après forgeage

Dans cette section, on compare les propriétés de la pièce simple avec celles de la pièce industrielle après forgeage et refroidissement. Des tests mécaniques à température

ambiante (tests de compression axiale) sont effectués à différents endroits (des zones de forte déformation aux zones de faible déformation en passant par les zones intermédiaires). L'étude vise ici à savoir si les propriétés finales du matériau sont dépendantes des niveaux et des chemins de chargements appliqués lors de la mise en forme. Les courbes contraintes déformation pour la pièce industrielle et la pièce simple sont présentées ci-dessous.

- Pièce industrielle

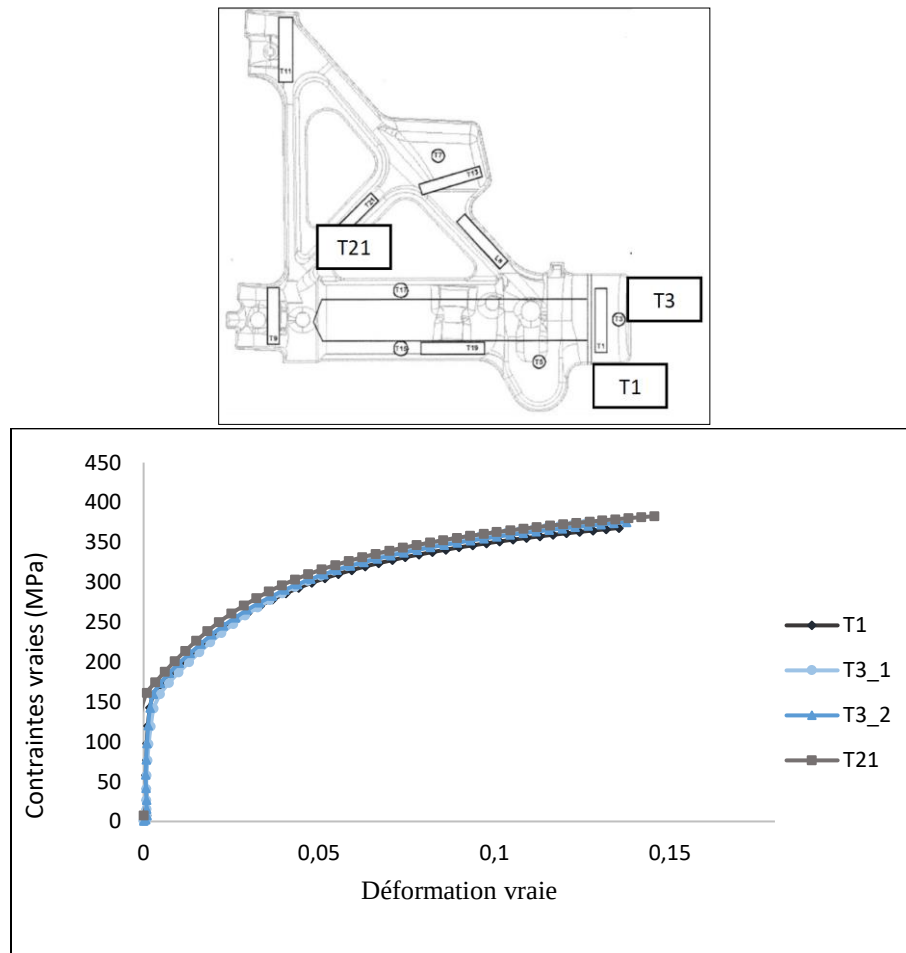


Figure 5 - 14 : Propriétés de la pièce industrielle après forgeage

L'échantillon T21 (figure 5-14) provient d'une zone où le matériau a été fortement déformé lors du forgeage, et où le refroidissement a été rapide, tandis que les échantillons T1, T3_1 et T3_2 proviennent de zones moins déformées et où la section est très épaisse, résultant en un refroidissement lent. Malgré les différents chemins de chargement, nous

pouvons observer que les propriétés aux différents endroits sont similaires. La limite élastique se situe autour de $160 \text{ MPa} \pm 18 \text{ MPa}$ et la contrainte maximale autour de $375 \text{ MPa} \pm 9 \text{ MPa}$.

- Pièce simple

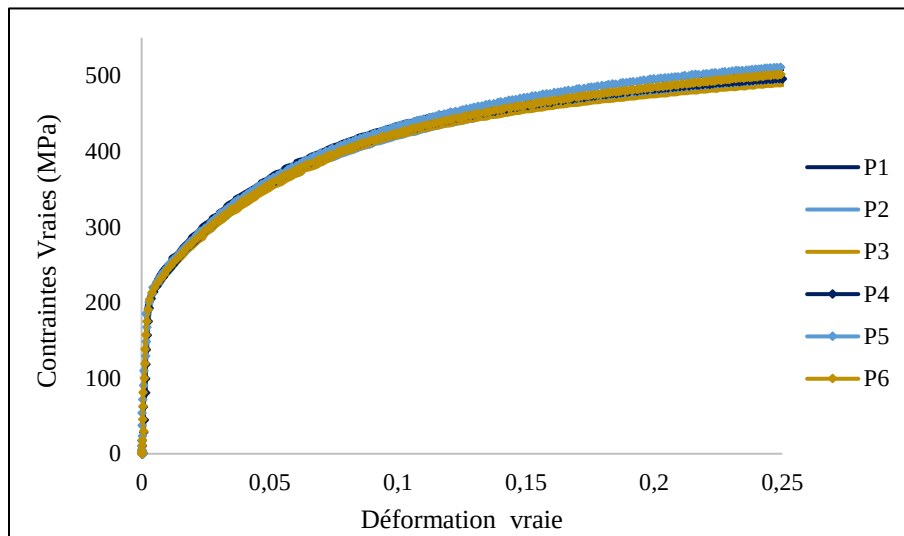
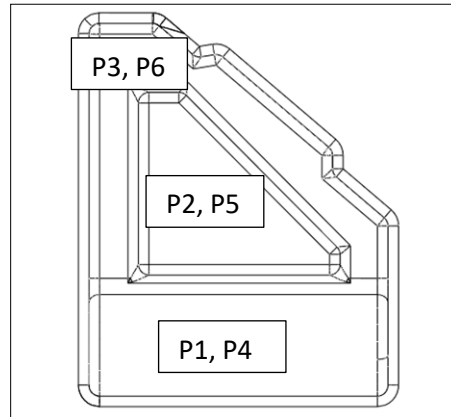


Figure 5 - 15 : Propriétés de la pièce simple après forgeage

Les échantillons P1 et P4 se trouvent sur la partie cylindrique de la pièce. À cet endroit, la déformation lors du forgeage est moins importante qu'au niveau du centre de la pièce où sont localisés les échantillons P2 et P5. Les échantillons P3 et P6 se trouvent sur une partie de la pièce où le niveau de déformation est intermédiaire au niveau atteint sur le cylindre et le centre de la pièce. Les résultats obtenus sont similaires à ceux observés sur la pièce industrielle, à savoir que les propriétés aux différents endroits sont similaires.

Quant à la limite élastique, elle se situe autour de $192 \text{ MPa} \pm 18 \text{ MPa}$ et la contrainte maximale autour de $507 \text{ MPa} \pm 11 \text{ MPa}$.

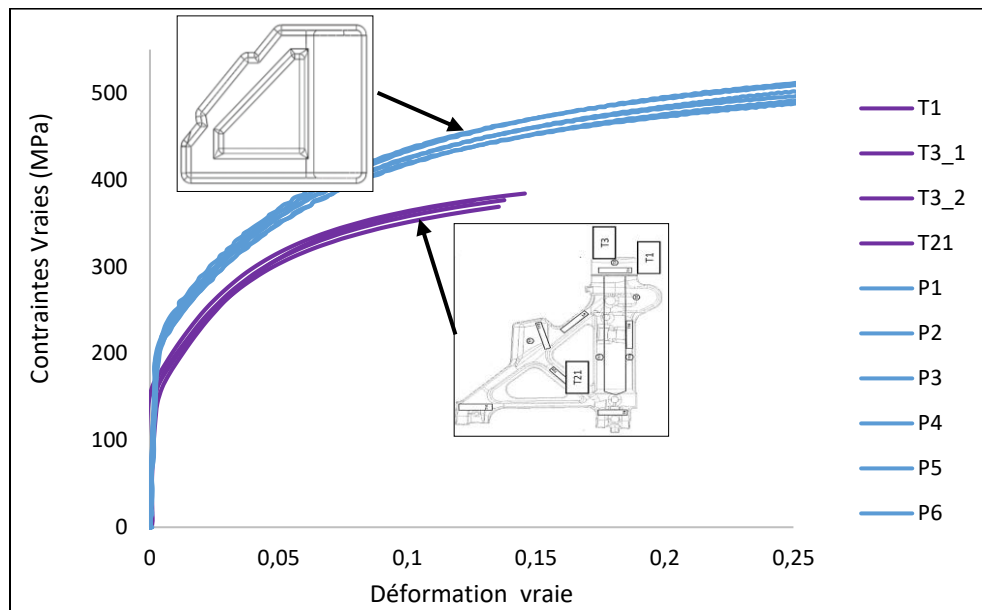


Figure 5 - 16 : Comparaison des propriétés de la pièce simple avec celles de la pièce industrielle

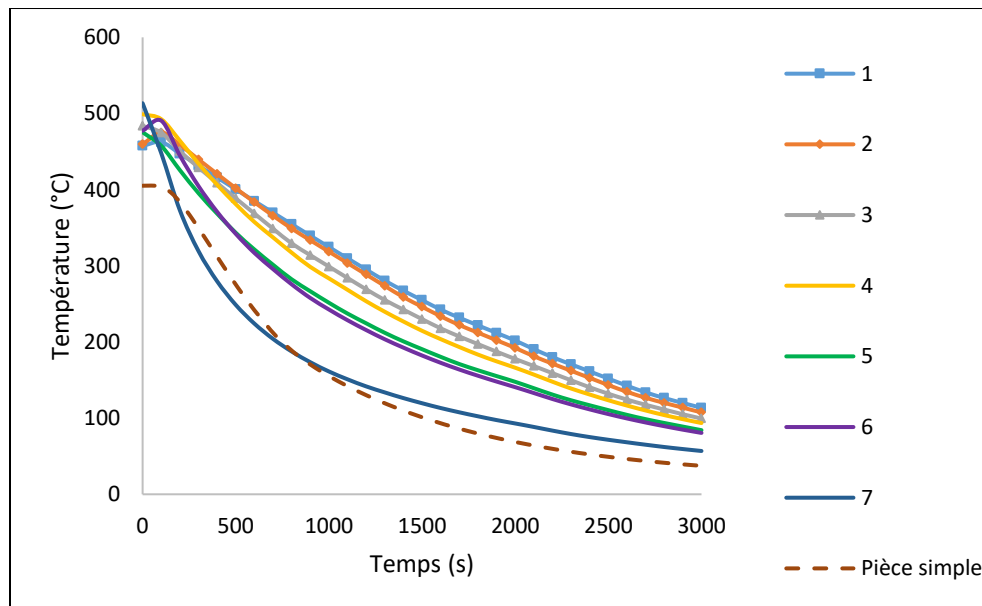


Figure 5 - 17 : Comparaison des courbes de refroidissement de pièce simple avec celles de la pièce industrielle

La pièce simple refroidit beaucoup plus vite que la pièce industrielle comme on peut le voir à la figure 5-17. Ce qui explique que les propriétés de la pièce simple sont plus élevées. En effet, plus le refroidissement est rapide, plus les propriétés mécaniques obtenues sont élevées [R3]. À l'inverse, plus le refroidissement est lent, plus les précipités sont gros, mais aussi moins nombreux, ce qui se traduit par une limite élastique plus faible.

En somme, on peut retenir que la pièce simple est un bon modèle d'étude en ce qui concerne le développement de la méthodologie de modélisation du procédé. Outre la reproductivité des critères de design et de mise en forme, on constate aussi que les propriétés après forgeage sont similaires (environ une différence de 32 MPa pour la limite élastique et 132 MPa pour la contrainte maximale).

On peut donc supposer que pour la suite des étapes de fabrication de la pièce (usinage et grenailage), les résultats de forgeage qui constituent l'intrant permettront une bonne approximation des résultats.

5.6. Conclusion

Le travail présenté dans ce chapitre est orienté sur la pièce industrielle. Les différentes simulations effectuées ont permis de suivre la mise en forme de la pièce ainsi que l'évolution de ses propriétés jusqu'à la fin de l'étape de préforgeage. La comparaison des deux pièces (industrielle et académique) nous a montré que les propriétés du matériau après forgeage de la pièce simple s'approchent de celles de la pièce industrielle après l'étape de préforgeage. Cette similitude est intéressante pour les opérations subséquentes de fabrication (usinage sur la pièce simple représentatif de celui qui est fait sur la pièce industrielle) car, le suivi des évolutions des propriétés du matériau sur la pièce simple permettra d'avoir une approximation pour celle de la pièce industrielle.

Ce chapitre complète les développements expérimentaux effectués dans le cadre de la mise en forme par forgeage. Dans le prochain chapitre, les développements numériques effectués dans cette thèse seront mis en avant. Le forgeage avec la méthode SPH en formulation eulérienne et lagrangienne totale sera traité afin de vérifier le niveau de

précision de cette méthode via le code commercial Abaqus et via les codes usagers (code SPH maison et VUEL Abaqus).

Chapitre 6

Formulation lagrangienne totale de la méthode SPH : application au procédé de mise en forme

Dans ce chapitre, on présente la méthode SPH. Après un bref rappel historique des principes de la méthode selon l'approche eulérienne, une formulation lagrangienne totale pour des applications en grandes déformations en mécanique des solides est présentée. La dernière section de ce chapitre porte sur les applications. On présente les résultats avec le code commercial Abaqus, l'amélioration d'un code SPH maison et le développement d'un élément de l'utilisateur VUEL («vectorized user element») SPH lagrangien total dans Abaqus.

Convention sur l'utilisation des variables :

Pour les équations en mécanique classique : i, j et k représentent les indices de coordonnées dans un système de coordonnées cartésiennes.

Pour les équations en SPH : i et j représentent des particules SPH et α, β et γ représentent des indices de coordonnées dans un système de coordonnées cartésiennes.

6.1. Introduction

Afin de pallier aux limitations de la MÉF dans certaines opérations impliquant la dynamique rapide comme l'usinage grande vitesse ou la génération de «flash», ce chapitre présente la méthode SPH comme alternative à la méthode des éléments finis.

Par ailleurs dans une perspective d'intégration et de modélisation en chaîne de l'ensemble des procédés de mise en forme de la composante industrielle, la méthode SPH se positionne comme un outil de simulation efficace. Un transfert entre les différentes étapes de simulation s'effectue facilement sans qu'aucun remaillage ne soit nécessaire.

Afin de comprendre les bases théoriques de la méthode, un rappel de la formulation SPH classique et de quelques problèmes liés à SPH et leur correction seront présentés.

Par la suite, une formulation SPH thermomécanique en formulation lagrangienne totale adapté à la mécanique des solides sera présentée. Et ceci nous amènera à la mise en œuvre numérique sur trois étapes :

- Tout d'abord, la formulation SPH implémentée dans Abaqus va être utilisée pour traiter les problèmes en question dans ce travail. Cette exploitation de codes existants a permis de mettre en évidence la limitation des implémentations actuelles.
- Par la suite, l'amélioration d'un code SPH maison afin de vérifier rapidement la faisabilité d'une nouvelle formulation, de ses avantages et inconvénients sera considérée en l'appliquant à des exemples académiques. Cette implémentation avancée de la méthode SPH permet d'arriver à une simulation plus fine du procédé de forgeage en certaines configurations.
- Enfin, le transfert de la formulation SPH formulation lagrangienne totale du code maison vers ABAQUS se fait comme élément de l'utilisateur via l'utilitaire VUEL (intégrant aussi un VUMAT). Ceci permet d'améliorer la formulation SPH disponible dans le code commercial ABAQUS qui pourra être utilisée dans la modélisation des opérations subséquentes tel que l'usinage rapide.

Le chapitre se termine par des exemples d'application, en comparant les résultats de la nouvelle approche à ceux obtenus avec les autres méthodes éléments finis et SPH.

6.2. Rappels : formulation SPH classique

La méthode SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) [L4, L5, M4, M5, M6, M7, W1, F1] a été introduite au cours des années 70 par Lucy, Gingold et Monaghan [M4, M5, M6, M7] pour l'étude de phénomènes d'astrophysique. Il s'agissait de simuler des phénomènes tels que la formation et l'évolution d'étoiles et de galaxies. Elle est l'une des premières méthodes particulières numériques en mécanique [L2]. Initialement réservée au domaine de l'astrophysique (simulation de supernova par exemple), la méthode a par la suite connu un développement dans les applications en dynamique des fluides (simulation de fluides compressibles, incompressibles et multi-phasiques). La méthode a aussi été utilisée pour des problèmes de nature thermique et électromagnétique [C9].

L'extension de la méthode à la mécanique des structures est plus récente (année 90), notamment parce qu'elle s'est heurtée à certaines difficultés décrites dans la section 6.2.5. Libersky et al. [L16, L17] sont cités comme les premiers à avoir utilisé SPH en mécanique des solides, pour la modélisation des impacts à hautes vitesses et des phénomènes de rupture, de perforation et de fragmentation. D'autres applications similaires ont suivi avec les travaux de Johnson et al. [J6]. Des applications au niveau des procédés de forgeage [C2], de l'usinage [L10, L11] et de soudage [T2] positionnent SPH comme une méthode numérique efficace pour la simulation des problèmes de mise en forme mécanique. En effet SPH se démarque de la méthode des éléments finis grâce aux avantages suivants :

- Absence de connectivités fixes entre les nœuds, ce qui supprime les effets indésirables de la MEF (distorsion du maillage).
- Grande aptitude à suivre les déformations de surface de la pièce.
- Meilleure visualisation de la distribution des contraintes.

- Aptitude à intégrer l'histoire du matériau dans chaque particule.
- Aptitude à interagir avec des matrices à géométrie complexe.
- Meilleure reproduction de la physique.

Bien que ces avantages soient intéressants, il est à noter que l'extension de la méthode à la mécanique des solides a révélé certains problèmes numériques notamment les problèmes d'intégration numérique lorsqu'une formulation faible est utilisée, les problèmes d'instabilité en tension ou encore les modes à énergie nulle.

Les problèmes d'instabilité en tension proviennent du fait que l'approche SPH étant lagrangienne par construction, du point de vue numérique, l'utilisation d'un noyau eulérien (le noyau eulérien permet de gérer facilement la création de bords libres et des grandes déformations) fait apparaître une instabilité lorsque les particules sont dans un état de tension. Quant aux modes à énergie nulle, il s'agit de modes de déformation qui ne créent pas d'énergie de déformation. Ces problèmes de la méthode SPH ont été en partie résolus grâce à des corrections apportées à la méthode. Nous y reviendrons plus tard en section 6.2.5

On s'intéressera alors dans ce chapitre à la simulation du forgeage avec la méthode SPH soit en utilisant le code commercial Abaqus, en recourant à l'utilitaire élément de l'utilisateur VUEL combiné à une loi de comportement de l'utilisateur VUMAT (le VUMAT permet d'intégrer la loi de comportement, c'est-à-dire en un point d'intégration, de calculer le tenseur des contraintes, les variables internes, etc.), ou soit via l'amélioration d'un code SPH maison spécialisé pour la modélisation thermomécanique en formulation lagrangienne totale. Rappelons que la formulation SPH thermomécanique n'est pas offerte dans le logiciel Abaqus à notre disposition (v6.14) et que les contributions présentées ici visent à permettre à l'utilisateur de pallier à cette situation.

On commencera par présenter les principes de la méthode. La méthode SPH formulée ici est basée sur l'approche de G. R. Liu et M. B. Liu [L5], elle est représentée d'une part par une approximation à l'aide des fonctions noyau, ou « Kernel fonction », W du champ et d'autre part par l'approximation du milieu continu avec un ensemble de particules. Le développement de ces aspects est présenté dans les sections suivantes.

6.2.1. Représentation intégrale d'un champ de fonction

La méthode SPH est une méthode sans maillage de nature lagrangienne et qui est basée sur une représentation par intégrale de convolution. L'idée de base, de la représentation intégrale, consiste alors à exprimer une fonction $f(\mathbf{x})$ en fonction des valeurs de f sur un voisinage de $\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^3$ en approximant f par convolution avec une fonction de Dirac sur le domaine Ω sous la forme suivante :

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (6.1)$$

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} = \mathbf{x}' \\ 0 & \mathbf{x} \neq \mathbf{x}' \end{cases} \quad (6.2)$$

où f une fonction arbitraire du vecteur tridimensionnel $\mathbf{x}$ et δ la fonction de Dirac. On a donc égalité entre la valeur du champ $f(\mathbf{x})$ au point $\mathbf{x}$ et sa valeur interpolée.

Cependant, pour une question de dérivabilité de la fonction test (de Dirac), on remplace celle-ci par une fonction de forme (couramment appelée noyau) plus régulière. On introduit alors la longueur de lissage h qui est une mesure de l'étalement du noyau autour du point d'intérêt $\mathbf{x}$. Cette grandeur doit tendre vers 0 de manière à faire tendre la fonction de forme vers un Dirac. Nous perdons donc l'égalité entre la valeur du champ et son approximation. En remplaçant la fonction $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ par la fonction de lissage $W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h)$, la fonction $f(\mathbf{x})$ devient :

$$f(\mathbf{x}) \cong \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' \quad (6.3)$$

6.2.2. Conditions et propriétés de la fonction de lissage

En pratique, le noyau W doit être choisi de façon à satisfaire certaines propriétés (positivité, centré radialement en $\mathbf{x}$, décroissance monotone, symétrie) et en imposant les conditions suivantes de façon à pouvoir évaluer la précision de l'approximation ainsi réalisée :

Partition de l'unité (condition de normalisation) : $\int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' = 1, \quad (6.4)$

Propriété de Dirac : $\lim_{h \rightarrow 0} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad \text{et} \quad (6.5)$

Support compact : $W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) = 0 \quad \text{quand} \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| > \kappa h \quad (6.6)$

Ici h est la longueur de lissage et κ , une constante liée à la fonction de lissage W , et définit la surface effective (non nulle) de la fonction de lissage.

Précision de l'approximation SPH : En utilisant les séries de Taylor, l'erreur de l'approximation par des fonctions de forme intégrale de la méthode SPH peut être estimée approximativement comme suit. Soit r le résidu :

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} [f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) + \int_{\Omega} r((\mathbf{x}' - \mathbf{x})^2)] W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' \quad (6.7)$$

$$f(\mathbf{x})^h = f(\mathbf{x}) \int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' + f'(\mathbf{x}) \int_{\Omega} (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' + r(h^2) \quad (6.8)$$

Comme W est une fonction paire par rapport à $\mathbf{x}$, l'équation 6.8 devient :

$$f(\mathbf{x}) = \underbrace{f(\mathbf{x}) \int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}'}_{=1} + \underbrace{f'(\mathbf{x}) \int_{\Omega} (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}'}_{=0 \quad W \text{ paire} \quad p/r \quad x} + r(h^2) \quad (6.9)$$

$$f(\mathbf{x})^h = f(\mathbf{x}) + r(h^2) \quad (6.10)$$

L'approximation est donc d'ordre 2. En suivant la même démarche que pour $f(\mathbf{x})$, le gradient du champ de la fonction peut être approximé par :

$$\nabla \cdot f(\mathbf{x})^h = - \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \cdot \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' \quad (6.11)$$

De la même manière que précédemment, en imposant la condition suivante :

$$\int_{\Omega} \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' = 0 \quad (6.12)$$

On peut montrer que l'approximation du gradient est aussi d'ordre 2

$$\nabla f(\mathbf{x}^h) = \nabla f(\mathbf{x}) + r(h^2) \quad (6.13)$$

6.2.3. Approximation discrète du schéma d'interpolation

L'interaction entre les particules est définie sur le domaine d'influence D de chaque particule avec ses particules voisines. Aussi il est important de bien définir la taille de ce domaine définie par la longueur de lissage (voir figure 6-1).

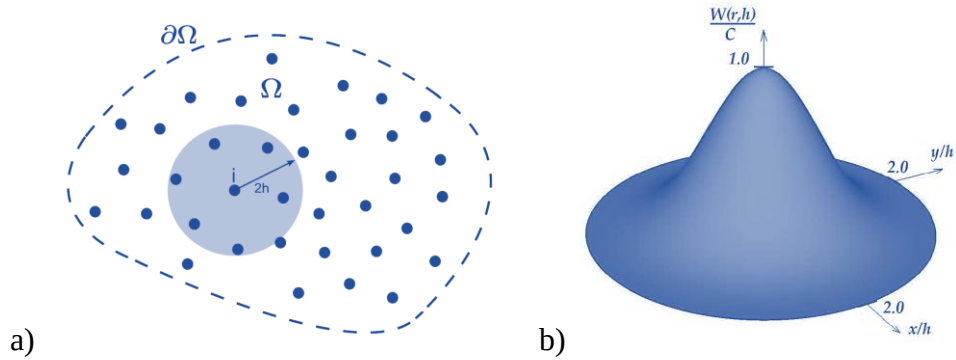


Figure 6 - 1 : a) Représentation schématique de la discrétisation du domaine Ω par un ensemble de points P_i , voisinage d'un nœud SPH [C3] et b) vue dans l'espace d'un noyau de type B-spline B3 [M8]

Tout d'abord le domaine de calcul Ω est subdivisé en volumes élémentaires ω_i dont on peut définir le barycentre P_i (de position x_i). Cet ensemble de points définit une discrétisation du domaine, qui peut donc être réalisé par un logiciel de maillage (en prenant

soin de minimiser les variations locales de volume pour des raisons de précision). Cependant, les frontières de ces volumes (les mailles au sens strict) ne sont qu'une représentation issue de la façon dont on génère le maillage. La méthode SPH, comme toutes les méthodes dites sans maillage, ne se base pas sur les mailles à proprement parler mais uniquement sur leurs volumes associés.

Dans cette analyse, les intégrales produit de convolution approximant le champ $f(\mathbf{x})$, équation 6.3 et son gradient, équation 6.11, sont converties en forme discrétisée en utilisant des formules de quadratures exploitant le caractère compact du support D de la fonction de forme W . Le domaine de support compact est de forme circulaire ou sphérique avec comme rayon κh (voir figure 6-2).

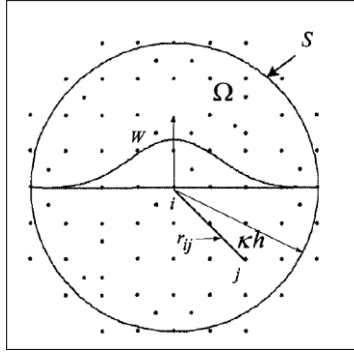


Figure 6 - 2 : Approximation particulière dans le domaine de support de la fonction de lissage W d'une particule i [L5]

En remplaçant le volume infinitésimal dx' d'une particule j par un volume ΔV_j de masse m_j attaché au nœud j , et tel que $m_j = \Delta V_j \rho_j$, on obtient les approximations particulières représentées par les équations 6.14 et 6.15. On introduit la distance $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = \|\vec{X}_i - \vec{X}_j\|$ pour la suite des équations ($\mathbf{x}$ et $\mathbf{X}$ représentent respectivement les coordonnées spatiales et matérielles en mécanique des solides).

$$f(\vec{x}_i) \cong \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\rho_j} f(\vec{x}_j) W(\vec{x}_i - \vec{x}_j, h) \quad (6.14)$$

$$\nabla f(\vec{x}_i) \cong - \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\rho_j} f(\vec{x}_j) \cdot \nabla_{\vec{x}_i} W(\vec{x}_i - \vec{x}_j, h) \quad (6.15)$$

6.2.4. Choix de la fonction W

Le noyau choisi pour approximer la fonction de Dirac peut être par exemple une « spline » ou une fonction gaussienne. Ces fonctions sont construites de façon à respecter des conditions (équations 6.4, 6.5 et 6.6). En pratique, le support du noyau n'est pas le domaine Ω de calcul mais un support compact D (i.e. au-delà d'une taille équivalente à n fois la longueur de lissage, la valeur du noyau est nulle). Les noyaux les plus couramment utilisés ont un support de rayon $2h$ ou $3h$. Ceci influera directement sur le nombre de voisins et donc sur la précision de l'approximation (la discrétisation). La fonction de lissage sous forme de fonctions « splines » cubiques (fonction B-spline) qui a été mise au point par Monaghan et Lattanzio [M4, M7] est l'une des plus populaires. Ce type de fonction a été utilisé par Caleyron et al. [C3] pour un cas de simulation faisant intervenir des non-linéarités.

$$W_i(\vec{x}_j) = w_{ij} = C \begin{cases} \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3} - \left(\frac{r_{ij}}{h} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{r_{ij}}{h} \right)^3 \right) & \text{si } 0 \leq \frac{r_{ij}}{h} \leq 1 \\ \frac{1}{6} \left(2 - \frac{r_{ij}}{h} \right)^3 & \text{si } 1 \leq \frac{r_{ij}}{h} \leq 2 \\ 0 & \frac{r_{ij}}{h} \geq 2 \end{cases} \quad (6.16)$$

$$r_{ij} = \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\| \quad \text{et} \quad C = \frac{3}{2\pi h^3} \text{ en } 3D \quad (6.17)$$

6.2.5. Quelques problèmes liés à SPH et leur correction

La formulation SPH classique utilise des noyaux eulériens dans le sens qu'ils doivent être recalculés à chaque changement de positions de particules au cours du temps. Elle rencontre quelques problèmes numériques tels que le manque de consistance, l'instabilité en tension et les modes à énergie nulle. Ces problèmes désavantagent la méthode mais il existe des solutions correctives proposées par plusieurs auteurs tels que Belytschko [B7], Monaghan et Gingold [M6, G5], Randles et Libersky [R1], etc. Dans la

présente section, on explique brièvement ce en quoi consistent ces problèmes et les solutions proposées pour les contourner.

- Problèmes de consistance

La consistance des équations SPH se réfère au polynôme d'ordre le plus élevé que la méthode est capable de reproduire avec précision et les équations SPH standard ne sont même pas consistant à l'ordre zéro [R4]. Le non-respect de la condition de consistance affecte la précision de la méthode (interpolation) et entraîne des problèmes de convergence. Une première solution proposée par Monaghan et Gingold [G5] consiste à faire une symétrisation afin d'avoir une consistance d'ordre zéro. Par la suite, Johnson et Beissel [J5], ont proposé une correction permettant d'avoir une consistance d'ordre 1. Randles et Libersky [R1] ont étendu cette correction à des problèmes de 2D et 3D et permet d'écrire le gradient d'une fonction sous la forme corrigée suivante :

$$\nabla f(\vec{x}_i) = \mathbf{B} \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\rho_j} \left(f(\vec{x}_i) - f(\vec{x}_j) \right) \nabla_{\vec{x}_i} W(\vec{x}_i - \vec{x}_j, h) \quad (6.18)$$

où $\mathbf{B}$ est la matrice de correction définie comme suit

$$\mathbf{B} = \mathbf{H}^{-1}, \mathbf{H} = \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\rho_j} \left(\vec{x}_i - \vec{x}_j, h \right) \nabla_{\vec{x}_i} W_{ij} \quad (6.19)$$

On peut également citer la méthode RKPM (« Reproducing Kernel Particle Method») [L15], comme étant une méthode faisant une correction de l'approximation SPH.

Une formulation SPH corrigée basée sur la correction de Randles et Libersky [R1] sera présentée à la section 6.3.2.

En général les différentes méthodes de correction de la consistance peuvent être classées en deux catégories : les méthodes dites intrinsèques et les méthodes dites extrinsèques. Les méthodes dites intrinsèques tentent d'augmenter directement la consistance des fonctions de forme dont la plus connues de cette catégorie est la méthode des moindres carrés mobiles, dite « MLS ou moving least square ». L'avantage principal de la méthode MLS est qu'elle permet de choisir l'ordre de consistance n voulu en construisant les fonctions de forme à partir d'une base polynomiale d'ordre n .

Pour ce qui est des méthodes dites extrinsèques, elles modifient l'approximation traditionnelle en utilisant le concept de partition de l'unité [C9].

- Problèmes de stabilité : Instabilité en tension

L'instabilité en tension est un phénomène dans lequel le mouvement des particules devient instable en présence de contraintes en tension dans le modèle, combiné à un signe négatif de la dérivée seconde de la fonction noyau [C9]. Elle se manifeste par une agglomération non physique de particules et conduit ultimement à une terminaison prématurée du processus de résolution [B7, D7].

Pour corriger ce problème, l'utilisation des fonctions de forme MLS (« moving least squares » ou moindres carrées mobiles) a été proposée par Dilts [D6]. Chen et al. [C6] a également proposé une correction de la méthode SPH qui améliore les propriétés de consistance des fonctions de forme. Il y a également l'approche adoptée par Belytschko et al. [B7] qui consiste à utiliser une formulation lagrangienne totale pour éliminer certains problèmes d'instabilité en tension car, tel qu'expliqué au niveau de l'introduction, les problèmes d'instabilité en tension proviennent du fait que l'approche SPH étant lagrangienne par construction, l'utilisation d'un noyau eulérien fait apparaître une instabilité lorsque les particules sont dans un état de tension. L'utilisation de la formulation lagrangienne totale permet également de réduire le temps CPU en évitant la recherche des particules voisines pour la construction de la fonction noyau à chaque pas de temps, les particules restant principalement voisines le long du processus en mécanique des solides. Cependant il y a des désavantages à utiliser une formulation lagrangienne totale en mécanique des fluides ou dans le cas de très grandes déformations en mécanique des solides pour lesquelles une formulation lagrangienne actualisée est mieux adaptée (la géométrie du domaine de calcul est périodiquement mise à jour pour tenir compte des nouvelles interactions de particules) [V5]. Par ailleurs, pour corriger le problème d'instabilité en tension une des méthodes les plus abouties a été proposé par Dyka et al. [D7] en introduisant un second type de point dit « stress point » (SP), différents des points SPH couramment utilisés. Contrairement aux nœuds SPH qui transportent une quantité de matière, ce sont uniquement des points de calcul des déformations et des contraintes. Ils

sont similaires aux points de Gauss en ÉF car, un calcul utilisant les SP peut être schématisé comme suit : à partir des grandeurs cinématiques connues aux nœuds SPH, les déformations et contraintes sont calculées sur les « stress point » et les équations d'équilibre sont résolues de nouveau sur les nœuds SPH [C9]. La méthode a été étendue aux dimensions 2 et 3 par Randles et Libersky [R1]. Cependant leur introduction induit un temps de calcul supplémentaire.

- Modes à énergie nulle

Les modes à énergie nulle correspondent à des modes de déformation qui ne génèrent pas de contraintes et donc pas d'énergie de déformation. Il résulte du fait que les champs de variables et leurs dérivées sont approximés sur la même particule dans un schéma de collocation [R4]. Ce mode perturbe les simulations et entraîne dans certains cas la création d'agglomérats de particules. Des travaux menés par Belytschko et al. [B7] ont confirmé la présence de modes à énergie nulle équivalents aux modes de « Hourglass » en éléments finis qui sont dus à une sous-intégration des équations de la forme faible (nombre de points de Gauss insuffisant en ÉF).

Ainsi, par analogie avec la méthode des éléments finis, Ganssmüller et al. [G6] ont emprunté les approches utilisées en ÉF pour la correction des problèmes liés au « hourglass » pour corriger le problème des modes à énergie nulle. Une meilleure stabilité de la méthode a ainsi été obtenue.

- Problèmes d'imposition des conditions aux limites

Le traitement des conditions limites est l'une des difficultés rencontrées avec la méthode SPH. En effet, lorsqu'une particule se trouve à proximité d'une limite du domaine, la fonction de forme nécessaire à l'interpolation des gradients ne se retrouve pas complètement remplie et cela cause des erreurs numériques. Des solutions ont été proposées comme l'introduction des particules fantômes qui consiste à étendre de manière fictive le domaine de calcul en créant des particules fantômes [O1]. Cela permet de compléter le support d'interpolation des particules aux bords des limites du domaine.

Grâce à ces solutions, la méthode permet une utilisation plus efficace en mécanique des solides qui s'ouvre de plus en plus à son utilisation.

Pour comprendre comment sont dérivées les équations discrétisées en SPH, on propose dans la prochaine section de faire le lien avec les équations de la mécanique des milieux continus.

6.3. Formulation SPH en mécanique des solides

6.3.1. Rappel des équations de la mécanique des milieux continus (MMC)

On rappelle quelques équations du modèle thermomécanique couplé (voir chapitre 2 pour le développement en détails des équations) nécessaires à la modélisation du procédé de forgeage décrit sous forme de lois de conservation en configuration spatiale (donc eulérienne) et en formulation lagrangienne ou matérielle :

- Conservation de la masse :

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -\text{div}(\rho \vec{v}) \quad \text{formulation eulérienne} \\ \rho_0 &= \rho J \quad \text{formulation lagrangienne} \end{aligned} \quad (6.20)$$

- Conservation de la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{1}{\rho} \text{div} \boldsymbol{\sigma} + \vec{f} \quad \text{formulation eulérienne} \\ \rho_0 \frac{D\vec{v}}{Dt} &= \text{div} \mathbf{P} + \rho_0 \vec{f} \quad \text{formulation lagrangienne} \end{aligned} \quad (6.21)$$

où $\vec{v}$ est le vecteur de vitesse, ρ est la densité du matériau, $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes de Cauchy et $\mathbf{P}$ le tenseur de Piola-Kirchhoff 1.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}_{\text{mécanique}} + \boldsymbol{\sigma}_{\text{thermique}} \quad \text{formulation eulérienne} \\ \mathbf{P} &= \mathbf{P}_{\text{mécanique}} + \mathbf{P}_{\text{thermique}} \quad \text{formulation lagrangienne} \end{aligned} \quad (6.22)$$

- Conservation de l'énergie :

$$\begin{aligned} \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} &= \nabla \cdot (k \nabla T) + q + r_{pl} \quad \text{formulation eulérienne} \\ \rho_0 C_v \frac{\partial T}{\partial t} &= \nabla \cdot (k \nabla T) + Q + R_{pl} \quad \text{formulation lagrangienne} \end{aligned} \quad (6.23)$$

où q est la source interne de chaleur obtenue à partir de l'équation simplifiée de la source interne de chaleur provenant de la contribution mécanique R_{pl} définie au chapitre 2 (section 2.6) et C_v désigne la chaleur spécifique.

$$\begin{aligned} q &= \beta \sigma_{eq}^y \Delta \varepsilon_{eq}^p \\ Q &= q \end{aligned} \quad (6.24)$$

où ε_{eq}^p est la déformation plastique équivalente, β représente la fraction de l'énergie mécanique transformée en chaleur (0.9), σ_{eq}^y est la contrainte réelle (équivalente) d'écoulement du matériau donnée par la loi d'écoulement (Johnson-Cook dans le cas présent).

À l'interface outil-pièce, on a :

$$\vec{q}_{contact} \cdot \vec{n} = -k \nabla T \cdot \vec{n} = k (T_{pièce} - T_{outil}) \quad (6.25)$$

où k est la conductivité de l'interface entre les deux matériaux.

Pour résoudre le problème thermomécanique avec la méthode SPH, les équations précédentes doivent être discrétisées. Deux formulations sont présentées ici, la formulation eulérienne ou spatiale et la formulation lagrangienne ou matérielle. Dans l'approche eulérienne (généralement utilisée pour les fluides), la configuration de référence étant la configuration actuelle, les particules, les fonctions et leurs gradients sont mis à jour à chaque pas de temps et donc le voisinage des particules est actualisé. Dans l'approche lagrangienne (généralement utilisée pour les solides), la configuration de référence est la configuration initiale et donc ne nécessite pas une mise à jour à chaque pas de temps. En général, en mécanique des solides, particulièrement pour les applications de forgeage, à

moins de cas exceptionnels de très grands écoulements, les particules conservent leurs voisins, même pour de grandes déformations.

a) Formulation SPH spatiale des équations de la MMC

La formulation spatiale ou eulérienne de SPH est la formulation de base de la méthode. Généralement utilisée pour les applications fluides, cette formulation est la seule présentement disponible dans Abaqus même pour le traitement des problèmes en mécanique des solides.

Les équations de conservation représentées de façon approchée par une formulation SPH dans la configuration spatiale s'écrivent comme suit [T2] :

- Équation de conservation de la masse pour une particule i :

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -\sum_{j=1}^n m_j (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \nabla_{\vec{x}_i} W_{ij} \quad (6.26)$$

où n est le nombre des particules dans la zone d'influence de la particule i, j indique l'indice d'une particule dans le voisinage.

- Équation de conservation de la quantité de mouvement pour une particule i :

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} = -\sum_{j=1}^n m_j \left(\frac{\sigma_j}{\rho_j^2} + \frac{\sigma_i}{\rho_i^2} + \frac{\Pi_{ij}\mathbf{I}}{\rho_{ij}^2} \right) \nabla_{\vec{x}_i} W_{ij} \quad (6.27)$$

où Π_{ij} représente la viscosité artificielle introduite dans le modèle pour contrôler des problèmes d'instabilité numérique et σ est la contrainte de Cauchy.

La viscosité dépend de la nature du problème (mécanique des fluides ou mécanique des solides) est calculée par :

$$\Pi_{ij} = \rho_{ij} \begin{cases} -\alpha ch\mu_{ij} + \beta h^2 \mu_{ij}^2 & \text{si } \mu_{ij} \leq 0 \\ 0 & \text{si } \mu_{ij} \geq 0 \end{cases} \quad (6.28)$$

$$\rho_{ij} = (\rho_i + \rho_j) / 2$$

$$\mu_{ij} = \frac{(\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot (\vec{x}_i - \vec{x}_j)}{\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|^2 + \phi^2} \quad (6.29)$$

où α et β sont respectivement les coefficients de viscosité linéaire et quadratique typiquement pris autour de 1 [L7], h est le paramètre du support de la fonction noyau et c est la vitesse du son dans le matériau. ϕ est un paramètre permettant d'éviter les divisions par 0, pris petit ($\phi = 0,1h$).

La contrainte de Cauchy donnée par :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\tau} \quad (6.30)$$

où $\boldsymbol{\delta}$ est le delta de Kronecker, p est la pression normalement calculée en utilisant une équation d'état (exemple : équation de Mie-Gruneisen pour les solides) et $\boldsymbol{\tau}$ représente la partie déviatorique (anisotropique) du tenseur de contrainte donnée par :

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \mathbf{D} \quad (6.31)$$

où μ représente le module de cisaillement et $\mathbf{D}$ est le tenseur de taux de déformation utilisé pour la mesure de la cinématique dans le formalisme eulérien donné par :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \otimes \vec{v} + \vec{v} \otimes \nabla) \quad (6.32)$$

En approximation SPH, l'équation 6.32 devient sous notation indicielle :

$$D_i^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\rho_j} \left[(\vec{v}_j - \vec{v}_i)_\alpha \nabla_{\vec{x}_{i\beta}} W_{ij} + (\vec{v}_j - \vec{v}_i)_\beta \nabla_{\vec{x}_{i\alpha}} W_{ij} \right] \quad (6.33)$$

où α, β représentent des coordonnées dans un système de coordonnées cartésiennes.

Pour déterminer le taux de variation de la contrainte de Cauchy qui sera utilisé dans le calcul incrémental de la contrainte (pour la mise à jour durant le calcul), le taux de contrainte objective de Jaumann sera utilisé :

$$\dot{\tau}_{ij} = 2\mu \left(D^{ij} - \frac{1}{3} \delta^{ij} D^{kk} \right) + \tau_{ik} R^{jk} + \tau_{kj} R^{ik} \quad (6.34)$$

où $\mathbf{R}$ est le tenseur taux de rotation défini par : $\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \vec{v} - \vec{v} \otimes \nabla)$ soit sous forme discrétisée :

$$R_i^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\rho_j} \left[(\vec{v}_j - \vec{v}_i)_\alpha \nabla_{\vec{x}_{i\beta}} W_{ij} - (\vec{v}_j - \vec{v}_i)_\beta \nabla_{\vec{x}_{i\alpha}} W_{ij} \right] \quad (6.35)$$

- Équation de conservation de l'énergie pour une particule i :

$$\rho_i c_i \frac{dT_i}{dt} = \sum_{j=1}^n -\frac{m_j}{\rho_j} \frac{4k_i k_j}{(k_i + k_j)} \frac{(T_i - T_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2} \nabla_{\vec{x}_i} W_{ij} + q_i + r_{pli} \quad (6.36)$$

où Q_i est la source de chaleur interne pour chaque particule. k_i et k_j représentent les conductivités thermiques des particules i et j.

Cette formulation n'est pas très adaptée pour la résolution des problèmes en mécanique des solides pour les raisons expliquées à la section 6.2.5 traitant des difficultés liées à SPH. Les noyaux SPH étant en formulation eulérienne, ils doivent être mis à jour à chaque pas de temps, des instabilités peuvent en découler. C'est pourquoi la formulation matérielle ou lagrangienne a été introduite pour une meilleure stabilité de la méthode en mécanique des solides.

b) Formulation SPH matérielle des équations de la MMC

En mécanique des solides, dans la formulation SPH, les particules sont bien ordonnées et changent moins souvent de voisins qu'en mécanique des fluides. C'est pourquoi une formulation lagrangienne totale [R4, V4] est alors bien appropriée. L'approche SPH étant lagrangienne par construction, en utilisant les coordonnées matérielles $\vec{X}$ au lieu des coordonnées spatiales $\vec{x}$, les voisinages des particules ne changent pas et donc les noyaux SPH et leurs gradients sont eux aussi maintenant en configuration initiale et n'ont pas à être actualisés.

Afin de mettre à jour la densité dans l'équation de conservation de la masse ($\rho_0 = \rho J = \rho \det F$), la valeur du Jacobien J est requise à chaque pas de temps dans le processus d'intégration. Le Jacobien est obtenu à partir du déterminant du tenseur gradient de déformation $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial (\mathbf{X} + \mathbf{u})}{\partial \mathbf{X}}, \text{ ou } F_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \delta_{ij} \quad (6.37)$$

Sa forme discrétisée en formulation SPH est donnée par Reveles [R4] :

$$\langle F_i \rangle = - \sum_j (\vec{u}_j - \vec{u}_i) \otimes \nabla_{\vec{x}_j} W(\vec{x}_i - \vec{x}_j, h_0) V_j^0 + I \quad (6.38)$$

$\nabla_{\vec{x}_j}$ est un opérateur différentiel et V_j^0 est le volume initial de la particule j .

- L'équation de conservation de la masse pour une particule i est approximée comme suit :

$$\frac{d\rho_{0i}}{dt} = - \sum_{j=1}^n m_j (\vec{V}_i - \vec{V}_j) \nabla_{\vec{x}_i}^0 W_{ij} \quad (6.39)$$

- La conservation de la quantité de mouvement devient pour une particule i :

$$\frac{d\vec{V}_i}{dt} = - \sum_{j=1}^n m_j \left(\frac{\mathbf{P}_j}{\rho_{0j}^2} + \frac{\mathbf{P}_i}{\rho_{0i}^2} + \frac{\Pi_{ij} \mathbf{I}}{\rho_{0ij}^2} \right) \nabla_{\vec{x}_i}^0 W_{ij} + \mathbf{f}_i \quad (6.40)$$

où $\mathbf{P}$ est la première contrainte de Piola-Kirchhoff qui sera déterminée selon le processus suivant :

- Dans le cas du formalisme lagrangien, nous utilisons le tenseur de déformation de Green-Lagrange comme mesure de déformation exprimée en termes du gradient de déformation comme suit :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (6.41)$$

- En prenant la dérivée par rapport au temps du tenseur de Green Lagrange nous pouvons écrire :

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} \right) \quad (6.42)$$

- Le taux de variation de tenseur de déformation matérielle de Green Lagrange et le tenseur taux de déformation spatiale $\mathbf{D}$ sont liés par la relation de transport convectif suivante :

$$\mathbf{D} = \left(\mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1} \right) \quad (6.43)$$

qui est la mesure de déformation utilisée pour mettre à jour les taux de contraintes de Cauchy écrites dans un repère corotationnel. La contrainte est alors intégrée incrémentalement dans le temps [R4] :

$$\sigma_{ij}(t+dt) = \sigma_{ij}(t) + \dot{\sigma}_{ij} dt = \left(\sigma_{ij}^{\nabla} + \sigma_{ik} R_{kj} + \sigma_{jk} R_{ki} \right) dt \quad (6.44)$$

avec $\sigma_{ij}^{\nabla} = C_{ijkl} D_{kl}$ aussi appelé taux de contrainte de Jaumann (pour respecter l'objectivité) et $\mathbf{R}$ est un tenseur taux de rotation.

- La contrainte de Cauchy doit maintenant être transformée en contrainte nominale de Piola Kirchhoff 1 par la relation :

$$\mathbf{P} = \mathbf{J} \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \quad (6.45)$$

- La conservation de l'énergie, sous forme discrétisée en SPH pour une particule i peut s'écrire :

$$\rho_i c_i \frac{dT_i}{dt} = \sum_{j=1}^n -\frac{m_j}{\rho_j} \frac{4k_i k_j}{(k_i + k_j)} \frac{(T_i - T_j) \cdot (r_i - r_j)}{(r_i - r_j)^2} \nabla W_{ij} + q_i + R_{pli} \quad (6.46)$$

Les équations 6.40 et 6.46 sont respectivement celle du mouvement et de l'énergie thermique de chaque particule qui peuvent se mettre après discrétisation et évaluation de toutes les interactions sous les formes :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i &= \ddot{\mathbf{u}}_i = \frac{1}{\mathbf{m}_i} (\mathbf{f}_{\text{int}(i)} - \mathbf{f}_{\text{ext}(i)}) \\ \dot{\mathbf{T}}_i &= \frac{1}{\mathbf{c}_i^k} (\mathbf{g}_{\text{int}(i)}^k - \mathbf{g}_{\text{ext}(i)}^k) \end{aligned} \quad (6.47)$$

Où $\mathbf{f}_{\text{int}(i)}$ et $\mathbf{f}_{\text{ext}(i)}$ sont les forces internes et externes et $\mathbf{g}_{\text{int}(i)}^k$ et $\mathbf{g}_{\text{ext}(i)}^k$ représentent les flux de chaleur interne et externe. Ces termes ont été définis dans le chapitre 2 à la section 2.7.2.

Ces équations différentielles se résolvent numériquement par une méthode de différence finie explicite utilisée en dynamique explicite pour mettre à jour la vitesse, la position et la température de chaque particule SPH. Se référer au chapitre 2 pour les différents types de résolution.

6.3.2. SPH corrigé en formulation lagrangienne totale

La formulation SPH présentée jusqu'à présent ne tient compte d'aucun des correctifs qui ont été apportés à la méthode pour la rendre plus cohérente, plus robuste et plus précise. Ainsi, nous présentons dans cette section, le modèle SPH normalisé et corrigé introduit par Randles et Libersky [R1]. La normalisation permet de corriger la consistance en apportant une consistance d'ordre 0. Quant à la correction, elle consiste en l'amélioration de l'approximation du gradient et donne un schéma d'approximation cohérente de premier ordre. Le modèle normalisé et corrigé se réfère à l'approximation du gradient corrigé combiné avec la fonction de lissage normalisée [R4].

Tout d'abord, la condition de consistance d'ordre 0 avec un noyau lagrangien est donnée par :

$$\sum_j W(\vec{X}_i - \vec{X}_j, h_0) V_j^0 = 1, \quad \text{où} \quad (V_j^0 = m_j / \rho_j^0) \quad (6.48)$$

$$\sum_j \nabla_0 W(\vec{X}_i - \vec{X}_j, h_0) V_j^0 = 0 \quad (6.49)$$

La condition de consistance d'ordre 1 avec un noyau lagrangien est donnée par :

$$\sum_j W(\vec{X}_i - \vec{X}_j, h_0) V_j^0 = \vec{X} \quad (6.50)$$

La normalisation de la fonction de forme est donnée par une fonction appelée la fonction de Shepard :

$$\tilde{W}(\bar{X}_i - \bar{X}_j, h_0) = \frac{W(\bar{X}_i - \bar{X}_j, h_0)}{\sum_j \frac{m_j}{\rho_j} W(\bar{X}_i - \bar{X}_j, h_0)} \quad (6.51)$$

Le lecteur peut se reporter aux travaux de Reveles [R4] pour les étapes complètes de dérivation de cette fonction.

L'équation 6.51 doit satisfaire la condition suivante :

$$\int_{\Omega} W(\bar{X}_i - \bar{X}_j, h_0) d\Omega = 1 \quad (6.52)$$

Étant donné que le dénominateur de l'équation 6.51 est constant, la dérivée du noyau normalisé peut s'écrire :

$$\nabla W(\bar{X}_i - \bar{X}_j, h_0) = \frac{1}{C} \nabla W(\bar{X}_i - \bar{X}_j, h_0) \quad (6.53)$$

avec

$$C = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} W(\bar{X}_i - \bar{X}_j, h_0) \quad (6.54)$$

L'expression de la correction du gradient est donnée par :

$$\mathbf{B} = \left(\sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (\bar{X}_i - \bar{X}_j, h_0) \otimes \nabla_{\bar{X}_i} W(\bar{X}_i - \bar{X}_j, h_0) \right)^{-1} \quad (6.55)$$

L'expression du gradient de déformation corrigé, en formulation lagrangienne totale s'écrit alors :

$$\langle F_i \rangle = \left(- \sum_j (\tilde{u}_j - \tilde{u}_i) \otimes \nabla_{\bar{X}_j} W(\bar{X}_i - \bar{X}_j, h_0) V_j^0 \right) \mathbf{B} + I \quad (6.56)$$

L'équation de la quantité de mouvement corrigée ainsi que l'équation de conservation de l'énergie corrigée sont données par :

$$\langle \vec{a}_i \rangle = \left(- \sum_j (\mathbf{P}_j - \mathbf{P}_i) \otimes \nabla_{\bar{X}_j} W(\bar{X}_i - \bar{X}_j, h_0) V_j^0 \right) : \mathbf{B} \quad (6.57)$$

$$\langle \dot{e}_i \rangle = \mathbf{P}_j : \left[\left(- \sum_j \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} (\mathbf{V}_j - \mathbf{V}_i, h_0) \otimes \nabla_{\bar{X}_i} W(\bar{X}_i - \bar{X}_j, h_0) V_j^0 \right) \mathbf{B} \right] \quad (6.58)$$

Les équations SPH étant corrigées, nous allons maintenant passer à l'étape de l'implémentation numérique pour la résolution des équations.

6.4. Mise en œuvre numérique

6.4.1. Algorithme de résolution

La résolution d'un problème SPH requiert l'intégration des calculs de différents sous-programmes comme on peut le voir à la figure 6.3. Typiquement, nous pouvons classifier la procédure typique de simulation en trois phases [L5] :

- La phase de « pre-traitement » ou d'initialisation : elle comprend la définition et l'entrée de la première configuration de la géométrie du problème (dimensions et limites), les informations sur la discrétisation initiale de la géométrie des particules, les propriétés matériaux, le pas de temps et d'autres paramètres de contrôle de simulation.
- La phase de « processing » ou de traitement : elle regroupe les principaux modules de simulation SPH et est implémentée dans le module d'intégration temporelle (« time integration »). Les méthodes standards telles que Leapfrog, prédicteur-correcteur et Runge-Kutta peuvent être utilisées. Les modules suivants doivent être inclus dans le traitement du module d'intégration temporelle :
 - Génération des particules de frontière (fantômes).
 - Module de recherche de particules voisines. Différentes approches (all-pair search, linked-list search algorithm, tree search algorithm,) peuvent être utilisées (voir la section 6.4.4).
 - Calcul de la fonction de lissage (pour l'approche de la densité de sommation) et ses dérivés à partir de l'information générée de l'interaction des paires de particules.
 - Mise à jour de la densité si l'approche de la densité de sommation est utilisée.
 - Calcul de la force visqueuse artificielle.
 - Le calcul des forces internes résultant des interactions de particules. Notez que la pression des particules est obtenue à partir de la densité et de l'énergie grâce à une équation d'état.
 - Calcul des forces externes si nécessaire.

- Calcul du changement de la quantité de mouvement, de l'énergie et de la densité (l'approche de la continuité de la densité est utilisée).
 - Mise à jour de la longueur de lissage pour l'étape suivante.
 - Mise à jour de la quantité de mouvement, de l'énergie et de la densité ; mise à jour de la position des particules et de la vitesse ; la vérification de la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement.
 - L'application des conditions aux limites.
- La phase de «post-processing» ou de post-traitement : Lorsque le temps de calcul est complété ou selon un intervalle posé, les informations résultant d'un état de calcul sont enregistrées dans des fichiers externes pour des fins d'analyses de post-traitement.

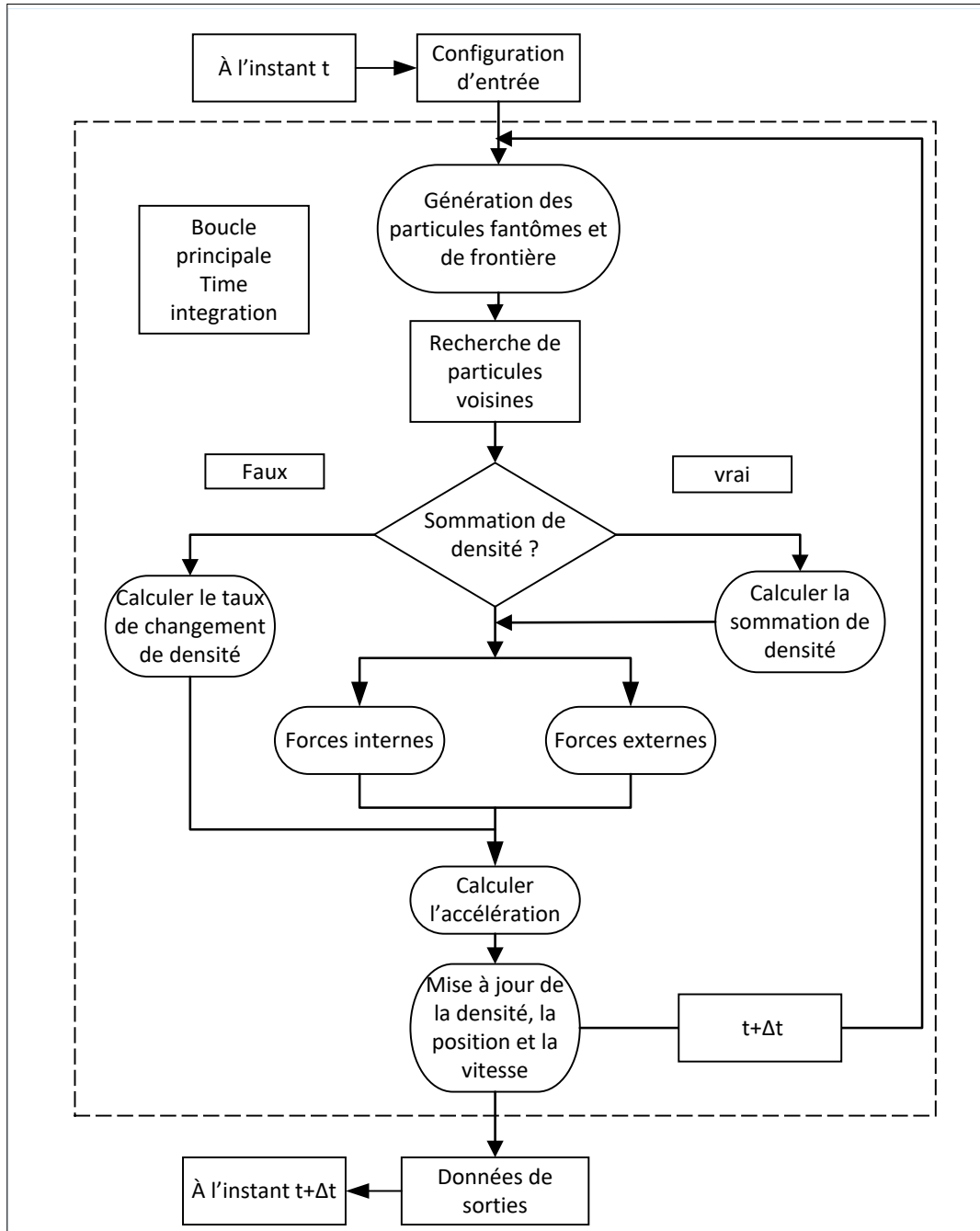


Figure 6 - 3 : Détails de l'algorithme général de résolution dans la sous-routine time intégration [L5]

Parmi les sous-routines présentées ci-dessus, celle de recherche des voisins nous intéresse particulièrement. En effet, elle influence de manière significative le temps de calcul SPH d'où la nécessité d'un choix d'algorithme de recherche de voisins éclairé et adapté à la physique du problème (voir section 6.4.4).

6.4.2. Schéma d'intégration temporelle

Un schéma d'intégration typique utilisé pour l'intégration des équations SPH est l'algorithme saute-mouton ou « Leap-frog » [R4]. Cet algorithme est une extension de l'algorithme de Verlet et a l'avantage d'une faible mémoire de stockage lors du calcul. Au début de l'intégration (première étape de la simulation), on considère que $\Delta t^n = \Delta t^{n+1}$:

$$\begin{aligned}\vec{u}^{n-1/2} &= \vec{u}^n - \frac{1}{2} \vec{v}^{n-1/2} \Delta t^n \quad \text{mécanique} \\ \bar{T}^{n-1/2} &= \bar{T}^n - \frac{1}{2} \dot{\bar{T}}^{n-1/2} \Delta t^n \quad \text{thermique}\end{aligned} \quad (6.59)$$

À ce stade, la position des particules et les vitesses sont connues à $n-1/2$. Le gradient de déformation et le tenseur taux de déformation de Green-Lagrange sont calculés. Après cela, la position et la température des particules sont mises à jour :

$$\begin{aligned}\vec{u}^n &= \vec{u}^{n-1/2} + \frac{1}{2} \vec{v}^{n-1/2} \Delta t^n \\ \bar{T}^n &= \bar{T}^{n-1/2} + \frac{1}{2} \dot{\bar{T}}^{n-1/2} \Delta t^n\end{aligned} \quad (6.60)$$

Le gradient de déformation est calculé à nouveau pour calculer le Jacobien à n . Le taux de contrainte est calculé à $n-1/2$ et le tenseur des contraintes est mis à jour comme suit :

$$\begin{aligned}\mathbf{S}^n &= \mathbf{S}^{n-1} + \dot{\mathbf{S}}^{n-1/2} \Delta t^n \\ \dot{\mathbf{S}}^{n-1/2} &= \mathbf{C} \dot{\mathbf{E}}^{n-1/2}\end{aligned} \quad (6.61)$$

où $\mathbf{S}$ est le second tenseur des contraintes de PK2. $\mathbf{C}$ est le module tangent du matériau et $\mathbf{E}$ est le tenseur de déformation de Green-Lagrange (équation 6.41).

Les vitesses sont avancées dans le temps de $n + 1/2$ en utilisant l'expression suivante :

$$\vec{v}^{n+1/2} = \vec{v}^{n-1/2} + \Delta t^* \vec{a}^n \quad (6.62)$$

Durant la première étape seulement on utilisera :

$$\Delta t^* = \frac{1}{2} (\Delta t^n + \Delta t^{n+1}) \quad (6.63)$$

Pour les étapes suivantes on utilise :

$$\Delta t^* = \frac{1}{2}(\Delta t^{n+1}) = \frac{1}{2}(\Delta t^n) \quad (6.64)$$

Finalement, la position et la température des particules sont mises à jour avec la nouvelle vitesse :

$$\begin{aligned} \vec{u}^{n+1} &= \vec{u}^n + \vec{v}^{n+1/2} \Delta t^{n+1} \\ \vec{T}^{n+1} &= \vec{T}^n + \dot{\vec{T}}^{n+1/2} \Delta t^{n+1} \end{aligned} \quad (6.65)$$

La nouvelle variable de temps est assignée comme suit :

$$\Delta t^n = \Delta t^{n+1} \quad (6.66)$$

À $n+1$, le nouveau pas de temps est donnée par :

$$\Delta t^{n+1} = \Delta t_{crit} m \quad (6.67)$$

où m est un facteur d'échelle de temps et le temps stable est donné par la condition de CFL (Courant-Friederichs-Levy) :

$$\Delta t_{crit} = \min \left(\frac{\Delta r_{min}}{C_d} \right) \quad (6.68)$$

avec C_d est la vitesse du son à travers le matériau.

La condition CFL montre que le domaine de calcul dans la simulation numérique doit inclure le domaine physique, où la vitesse maximale de propagation numérique doit être supérieure à la vitesse maximale de propagation physique. Cette condition CFL nécessite un pas de temps proportionnel à la distance inter-particule la plus petite Δr_{min} [A3, H3, T2]. Il est à noter que dans la pratique, selon Timesli [T2], le pas de temps dans les applications SPH dépend de la nature physique du problème et peut être plus grand que celui estimé en utilisant la condition CFL.

6.4.3. Discrétisation spatiale

Il est possible, à partir de fonction de forme moindres carrées mobiles $\langle \Phi(x) \rangle$, d'approximer le vecteur de vitesse $\{\mathbf{V}\} = {}^t \langle u, v, w \rangle$ et la température à chaque point en utilisant un ensemble de points existants dans le domaine d'influence [T2] :

$$\{\mathbf{V}\} = \sum_{i=1}^n [\Phi_i] \{\mathbf{V}_i\} \quad (6.69)$$

$$\{T\} = \sum_{i=1}^n [\Phi_i^T] \{T_i\} \quad (6.70)$$

où n est le nombre de points voisins, $[\Phi_i]$ est la matrice des fonctions de forme associées au point i et $\{\mathbf{V}_i\}$ et $\{T_i\}$ sont respectivement le vecteur de vitesse et la température du point i du domaine d'influence.

6.4.4. Sous-routine recherche de voisin

Le temps de calcul en SPH est un aspect important, puisque la méthode est généralement désavantagée pour son long temps de calcul. Cet aspect est en partie dû à la gestion de la recherche de particules voisines lors du calcul et de la mise à jour de la zone d'influence d'une particule. En effet, la fonction de lissage W est censée être supportée de façon compacte. Cela signifie que le nombre de voisins est fini [G4]. Afin de calculer la valeur de $\nabla_i W_{ij}$ ou W_{ij} , les voisins d'une particule doivent être connus. Pour y parvenir, les particules dans un rayon donné doivent être trouvées grâce à un algorithme de recherche de voisins les plus proches. Trois algorithmes de recherches identifiés dans Liu et Liu [L5] sont présentés ici :

- « All-pair search algorithm », il est moins efficace, toutes les particules du domaine sont analysées et les distances inter-particulaires r_{ij} vérifiées afin de trouver les voisins d'une particule. Cela conduit à un temps de calcul de l'ordre de N^2 , N étant le nombre total de particules (figure 6-4).

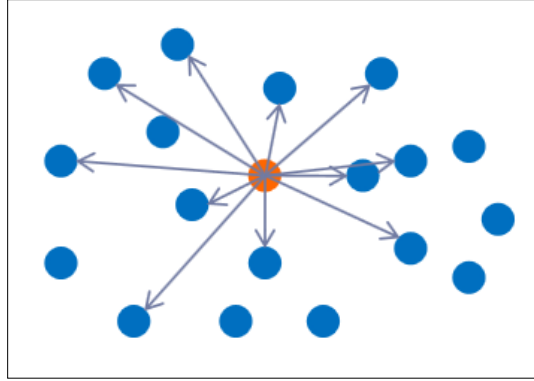


Figure 6 - 4 : « All-pair search algorithm » [L14]

- « Linked-list algorithm », cet algorithme consiste à diviser le domaine dans des cellules carrées de longueur d'arrêt Kh et de trier les particules dans sa cellule correspondante. Lorsque cela est fait, les voisins d'une particule sont dans les cellules voisines. Cela limite le nombre de calculs de r_{ij} , son efficacité est estimée à $O(N)$ si le nombre de particules par cellule est assez faible. L'inconvénient de cet algorithme est qu'il n'est pas très efficace pour des longueurs de lissage variables dans l'espace [G4] (figure 6-5).

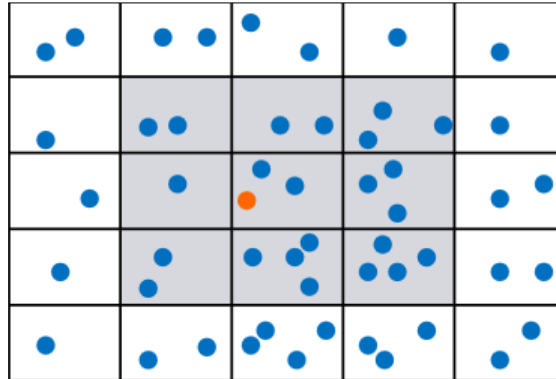


Figure 6 - 5 : « Linked-list algorithm » [L14]

- « Tree search algorithm », il divise le domaine en sous-domaines plus petits qui contiennent une seule particule. Les particules sont triées le long d'un arbre. L'efficacité de cet algorithme est $O(N \log N)$. Il est plus lent que le précédent, mais

il peut gérer plus efficacement les longueurs de lissage variables dans l'espace [G4] (figure 6-6).

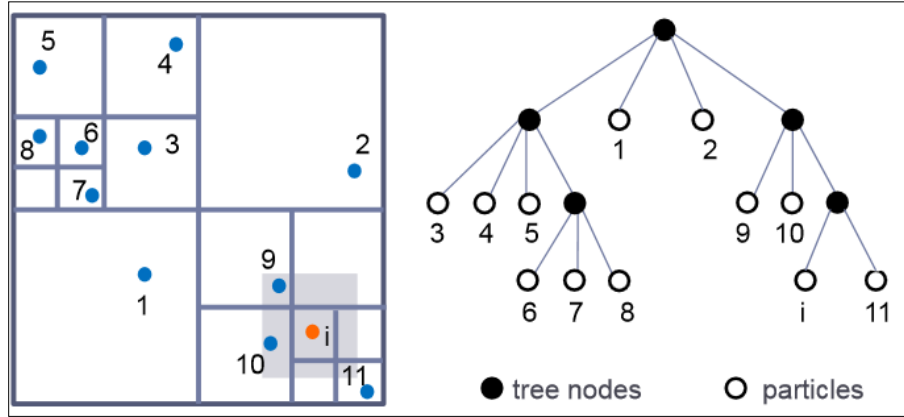


Figure 6 - 6 : « Tree search algorithm » [L14]

L'algorithme de recherche de voisin utilisé dans le VUEL est celui de type « linked-list », et la longueur de lissage est constante dans l'espace.

6.4.5. Algorithme SPH normalisé corrigé

On présente ici l'algorithme pour l'intégration dans le temps des lois de conservations tiré de Reveles [R4].

- Mécanique

1. Étant donné les variables connues à t_n

$$x^n, v^{n-1/2}, a^{n-1}, \Delta t^n, \Delta t^{n+1}, \rho^n, P^{n-1}, u^n$$

2. Calculer la dérivée normalisée du noyau à l'étape n (on le fait une seule fois et on stocke le résultat) :

$$\tilde{w}(\bar{X}_i - \bar{X}_j, h_0) = \frac{w(\bar{X}_i - \bar{X}_j, h_0)}{\sum_j \frac{m_j}{\rho_j} w(\bar{X}_i - \bar{X}_j, h_0)}$$

et

$$\nabla_{\bar{X}_i} \tilde{W}(\bar{X}_i - \bar{X}_j, h_0) = \frac{1}{C} \nabla_{\bar{X}_i} W(\bar{X}_i - \bar{X}_j, h_0)$$

Où

$$C = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} W(\bar{X}_i - \bar{X}_j, h_0)$$

3. Calculer le facteur de correction B

$$\mathbf{B} = \left(\sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (\bar{X}_i - \bar{X}_j, h_0) \otimes \nabla_{\bar{X}_i} W(\bar{X}_i - \bar{X}_j, h_0) \right)^{-1}$$

4. Calculer le déplacement $\vec{u}$ de la particule i à $n-1/2$. Doit être calculé pour toutes les composantes du vecteur de déplacement $\vec{u}$.

$$\vec{u}^{n-1/2} = \vec{u}^n - \frac{1}{2} \vec{v}^{n-1/2} \Delta t^n$$

5. Calculer le gradient de déformation à $n-1/2$

$$\langle \dot{F}_i^{n-1/2} \rangle = \left[- \sum_j \left(\vec{u}_j^{n-1/2} - \vec{u}_i^{n-1/2} \right) \otimes \nabla_{\bar{X}_j} W(\bar{X}_i - \bar{X}_j, h_0) V_j^0 \right] \mathbf{B} + I$$

6. Calculer la dérivée matérielle du gradient à $n-1/2$

$$\left\langle \dot{\dot{F}}_i^{n-1/2} \right\rangle = \left[- \sum_j V_j^0 (\mathbf{v}_j^{n-1/2} - \mathbf{v}_i^{n-1/2}) \otimes \nabla_{\bar{X}_j} W(\bar{X}_i - \bar{X}_j, h_0) \right] \mathbf{B}$$

7. Mettre à jour la densité des particules j à $n+1/2$

$$\rho_j^{n+1} = J^{-1} \rho_{0j} \quad \text{où} \quad J = \det |\mathbf{F}^n|$$

8. Calculer le taux de contraintes à $n-1/2$

- a) Calculer le tenseur de déformation de Green-Lagrange et sa dérivée donnés par :

$$\mathbf{E}^{n-1/2}(\bar{X}_i) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})^{n-1/2}$$

$$\dot{\mathbf{E}}^{n-1/2}(\bar{X}_i) = \frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} \right)^{n-1/2}$$

$$\text{où } \dot{\mathbf{F}} \text{ est connu à } n-1/2, \quad \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L}\mathbf{F}, \quad \dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \bar{X}} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \bar{X}}$$

- b) On convertit le taux de déformation de Green-Lagrange à n en un tenseur de taux de déformation à n défini comme suit :

$$\left(\mathbf{F}^T \mathbf{D} \mathbf{F}\right)^{n-1/2} = \dot{\mathbf{E}}^{n-1/2}, \quad \mathbf{D}^{n-1/2} = \left(\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1}\right)^{n-1/2}$$

Le tenseur « spin » à $n-1/2$ est donnée par :

$$\mathbf{L}^{n-1/2} = \mathbf{D}^{n-1/2} + \mathbf{W}^{n-1/2}$$

- c) Avec l'équation suivante, nous pouvons calculer le vrai tenseur de taux de déformation à $n-1/2$ via un modèle de loi de comportement dans les configurations spatiale et matérielle :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij}^{n-1/2} &= C_{ijkl} D_{kl}^{n-1/2} \\ \dot{S}_{ij}^{n-1/2} &= C_{ijkl} \dot{E}_{kl}^{n-1/2} \end{aligned}$$

où $\mathbf{C}$ est le module tangent matériel et $\mathbf{D}$ le tenseur de taux de déformation et $\mathbf{E}$ le tenseur de déformation de Green-Lagrange

- d) Mettre à jour le tenseur de contrainte

$$\begin{aligned} \sigma^n &= \sigma^{n-1} + \dot{\sigma}^{n-1/2} \Delta t^n \\ \mathbf{S}^n &= \mathbf{S}^{n-1} + \dot{\mathbf{S}}^{n-1/2} \Delta t^n \end{aligned}$$

9. Transformer la contrainte vraie dans le cas spatial ou la deuxième contrainte de Piola-Kirchhoff dans le cas matériel en contrainte de Piola-Kirchhoff 1 à n :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^n &= \left(J \mathbf{F}^{-1} \sigma \right)^n \\ \mathbf{P}^n &= \left(\mathbf{S} \mathbf{F}^T \right)^n \end{aligned}$$

10. Calculer les forces internes à n en utilisant l'équation de la quantité de mouvement SPH

$$f(\bar{X}_i)^n = - \sum_j \left[m_j \left(\frac{\mathbf{P}(\bar{X}_i)}{\rho_0^2(X_i)} + \frac{\mathbf{P}(\bar{X}_j)}{\rho_0^2(X_j)} \right) \frac{\partial W(\bar{X}_i - \bar{X}_j, h_0)}{\partial X_j} B \right]$$

où

$$\mathbf{P}(\bar{X}) = J \mathbf{F}^{-1} \sigma(\bar{X}) = J \mathbf{F}^{-1} \left(\sigma^{mec}(\bar{X}) + \sigma^{therm}(\bar{X}) \right)$$

11. Calculer l'accélération à n :

$$\frac{\partial v(\bar{X}_i)^n}{\partial t} = a(\bar{X}_i)^n = f(\bar{X}_i)^n$$

12. Calculer le temps stable et mettre à jour l'intervalle de temps :

$$\Delta t^{n+1} = m \Delta t_{crit}^{n+1}$$

où m est un facteur d'échelle de temps

13. Mettre à jour le temps d'intégration total :

$$t^{n+1} = t^n + \Delta t^{n+1}$$

14. Variables connues à la fin à n :

$$v^{n+1/2}, a^n, \Delta t^n, \Delta t^{n+1}, \rho^{n+1}, P^n, u^{n+1}$$

- Thermique

1. Étant donné les variables connues à t_n

$$T^n, \Delta t^n, \Delta t^{n+1},$$

2. Calcul des flux de chaleur internes

- Calcul de la conductivité thermique en fonction de la température actuelle
- Calcul du flux de chaleur
- Calcul des flux internes $g_{int(i)}^k$
- Calculer le flux provenant du terme de couplage mécanique $q_i = \beta \sigma_i^y \Delta \varepsilon_i^p$

3. Calcul des flux de chaleur externes : $g_{ext(i)}^k$

4. Calcul du taux de température : $\dot{T}_n$

5. Calcul des nouvelles températures T_{n+1}

6. Calcul du gradient de température

$$\nabla_{\bar{X}_i} T(\bar{X}_j) = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} T_j \nabla_{\bar{X}_i} W(\bar{X}_i - \bar{X}_j, h_0)$$

7. Calculer le temps stable et mettre à jour l'intervalle de temps :

$$\Delta t^{n+1} = m \Delta t_{crit}^{n+1}$$

où m est un facteur d'échelle de temps

8. Mettre à jour le temps d'intégration total :

$$t^{n+1} = t^n + \Delta t^{n+1}$$

9. Variables connues à la fin à n :

$$T^{n+1}, \Delta t^n, \Delta t^{n+1}$$

Le type de couplage est le même que celui présenté au chapitre 2. Un couplage faible (séquentiel) où chaque pas mécanique isotherme est suivi d'un pas thermique à géométrie fixe lors de la résolution numérique.

6.5. Applications

Conformément aux deux approches de résolution (eulérienne et lagrangienne) présentées dans ce travail, nous disposons de différents moyens d'application numérique :

- Via le code commercial Abaqus qui dispose de SPH eulérien,
- Via un code SPH maison indépendant en formulation lagrangienne totale ou actualisée, ou bien
- Via un VUEL d'Abaqus en formulation lagrangienne totale.

Chacune de ces trois méthodes sera présentée pour étudier les performances relatives à chacune d'elles.

6.5.1. Application via le code commercial Abaqus

En guise de rappel, Abaqus, bien que doté de la méthode SPH, n'offre pas encore l'option de la simulation thermomécanique. Afin de pouvoir utiliser SPH dans le cadre de la simulation du forgeage à chaud, nous utilisons dans un premier lieu un VUMAT (sous-routine de l'utilisateur modélisant le matériau) avec la formulation SPH d'Abaqus pour faire

le calcul thermomécanique couplé. Une sous- routine VUEL, utilitaire d'Abaqus qui permet à l'utilisateur d'implémenter son propre élément et donc sa formulation variationnelle dans Abaqus et un code SPH maison, basés les deux sur une formulation lagrangienne totale plus appropriée à la mécanique des solides en grandes déformations seront présentés ultérieurement.

-Application : Test de compression

Définition du problème : Comme premier exemple, on considère la compression d'un cylindre entre deux plaques rigides (figure 6-7). Le cylindre à 25,4mm de diamètre et 25,4mm de hauteur. La température initiale du test est de 400°C.

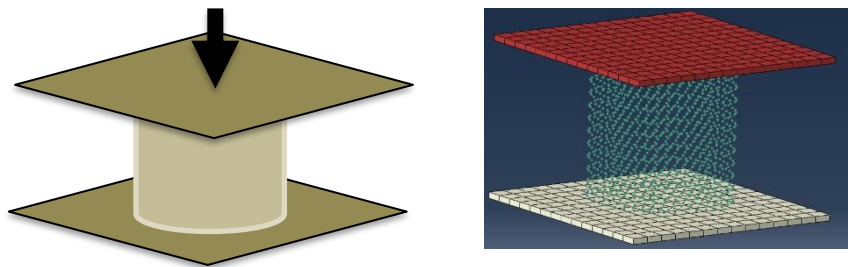


Figure 6 - 7 : Test de compression SPH

Tableau 6 - 1 : Comparaison des résultats d'ÉF avec SPH (vumat) pour le cas du test de compression.

	ÉF (lagrangien)	SPH (eulérien)
Nombre d'éléments finis ou de particules SPH	1680	1680
Pas de temps stable	$1,731^{e-4}$ à $1,936^{e-4}$	$4,963^{e-5}$ à $1,294^{e-4}$
Temps de simulation	2mn 37s	11mn 31s

Ci-dessous les résultats de simulations comparés avec les résultats d'Abaqus et expérimentaux. Les étapes du VUMAT sont présentées en annexe 1.

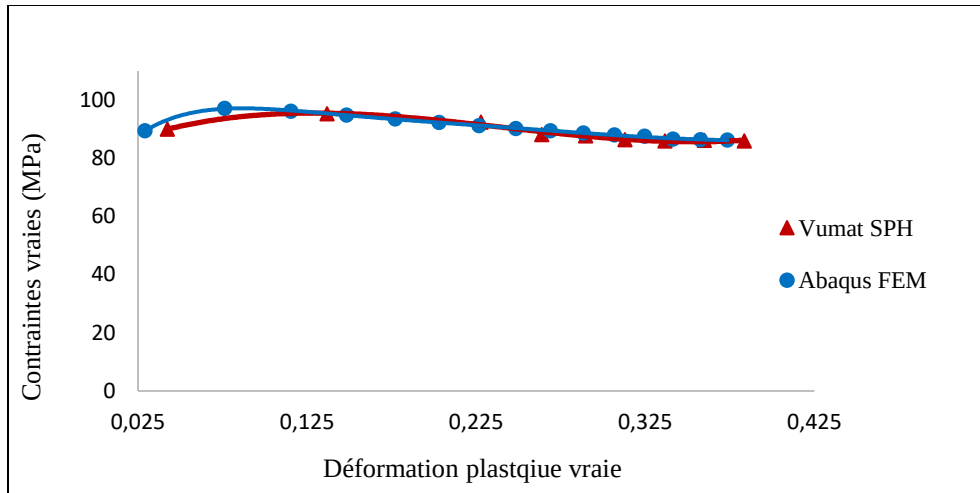


Figure 6 - 8 : Courbes contraintes-déformation : Abaqus MÉF versus VUMAT SPH

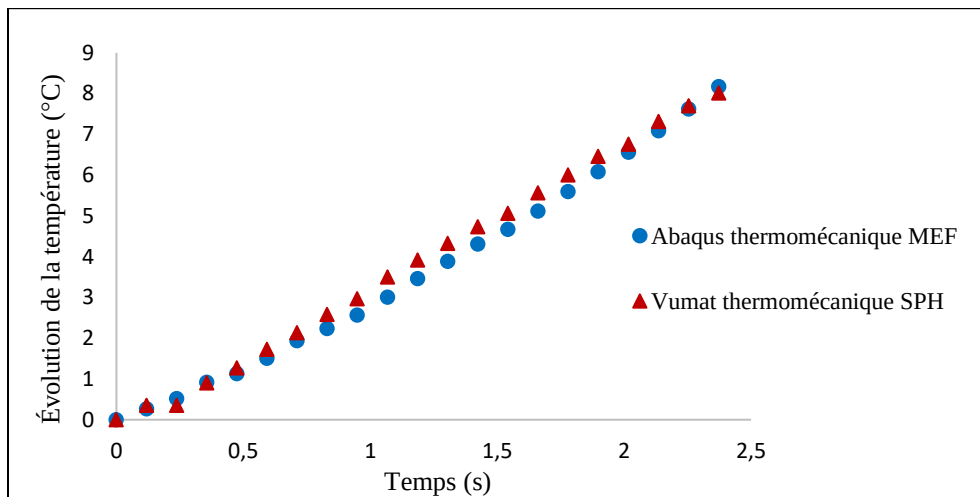


Figure 6 - 9 : Courbes d'évolution de la température : Abaqus MÉF versus VUMAT SPH

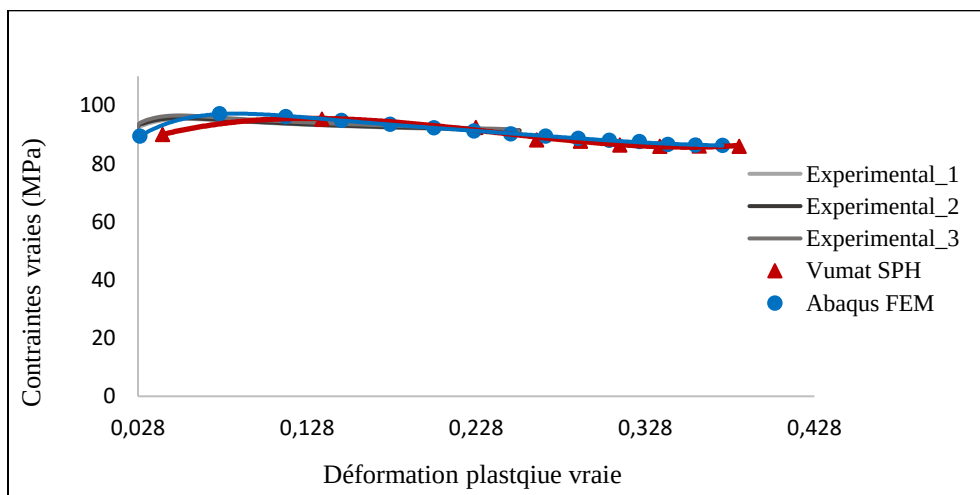


Figure 6 - 10 : Comparaison Expérimental versus Abaqus MÉF versus VUMAT SPH

Les figures 6-8, 6-9 et 6-10 montrent que les résultats du VUMAT avec SPH concordent avec ceux d'Abaqus Explicit en ÉF. Une comparaison des deux résultats de simulation avec les résultats expérimentaux a par ailleurs permis de conclure sur la fiabilité des différents résultats de simulation. L'ensemble des courbes simulées (Abaqus MÉF et VUMAT SPH) suivent la même évolution que les tests expérimentaux. Cependant, il faut noter que le temps de simulation en SPH qui est eulérien dans le cas présent est environ 6 fois plus grand que celui en ÉF.

Afin de valider nos observations avec un modèle plus complexe, on va simuler la pièce simple présentée au chapitre 3 en SPH. Ce modèle comporte un plus grand écoulement de matière comparé à l'exemple précédent et des niveaux de déformation assez importants pour tirer des conclusions significatives sur la précision des résultats obtenus avec le VUMAT.

- Résultats de forgeage de la pièce simple en SPH

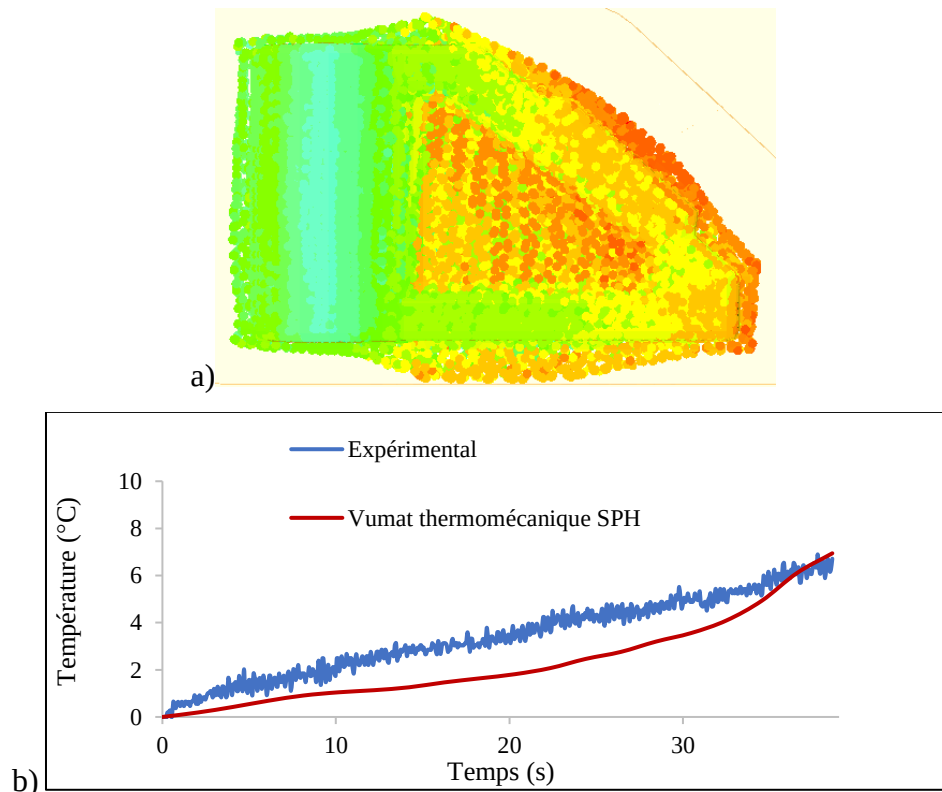


Figure 6 - 11 : Résultat de forgeage avec le VUMAT en SPH : a) pièce forgée en SPH et b) comparaison des courbes d'évolution de la température

La figure 6-11 b) montre que la simulation reproduit bien la température de la pièce lors du forgeage avec moins de 2°C de différence entre la courbe simulée et celle expérimentale. Ce qui nous permet de conclure que la VUMAT fournit de bons résultats. Toutefois, comme on le verra à la section 6.5.2, le temps de simulation associé au calcul du VUMAT qui utilise la formulation SPH eulérienne d'Abaqus n'est pas très optimal et laisse place à de l'amélioration.

6.5.2. Performance relative des méthodes ÉF, CEL et SPH d'Abaqus

On propose dans cette section de comparer les différentes méthodes de simulation abordées dans ce travail (ÉF, CEL et SPH). Comme nous en avons déjà parlé, la méthode ÉF est sujette à des problèmes de distorsion de maillage en présence de grandes déformations. Pour pallier à cela, il existe des techniques de remaillage ou de contrôle de la distorsion du maillage. Il s'agit entre autres de la méthode ALE [G10] et la technique de « distorsion control » d'Abaqus.

En fait, la méthode ALE (figure 6-12) permet de rafraichir le maillage pour des problèmes de grandes déformations tel que le forgeage, où des problèmes de distorsion de maillage se posent lors des simulations. Elle combine les avantages des représentations lagrangienne et eulérienne, qui offrent respectivement une bonne définition des frontières (ou contour de la pièce) et une possibilité de prise en compte de grandes déformations [G1]. Le déplacement de la matière est découplé avec celui du maillage (formulation eulérienne). À chaque étape, il s'opère un repositionnement des nœuds déplacés sans modification du nombre d'éléments (i.e. respect de la topologie du maillage) ou du degré des fonctions d'interpolation.

Toutefois, il est à noter que la méthode ALE peut devenir très coûteuse lorsque le maillage est très fin. Le choix des critères de repositionnement des nœuds peut également être une lourde tâche pour des pièces très complexes. De plus, ALE n'est efficace que lorsqu'un maillage unique peut être adapté de manière efficace pendant toute la durée du processus, ce qui représente un défi important lorsque la forme de la pièce initiale et très différente de la forme finale de la pièce (exemple pour passer d'une billette cylindrique à

la composante du train d'atterrissage). Il est possible de se rapporter aux travaux de Galada [G1] pour plus d'informations sur la méthode ALE.

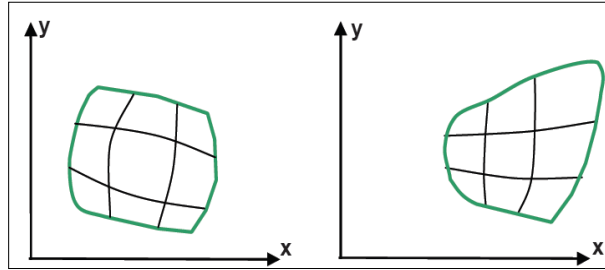


Figure 6 - 12 : Formulation ALE à deux instants successifs [G1]

Pour ce qui est de la technique de contrôle de distorsion du maillage, elle permet d'empêcher les éléments de s'inverser ou de subir trop de distorsions en fixant un rapport de longueur r ($0 < r \leq 1$) entre la longueur caractéristique initiale de l'élément et la longueur de distorsion de l'élément [Documentation d'Abaqus]. Toutefois, le choix du ratio va de pair avec la taille du maillage, pour une pièce avec des déformations importantes, un maillage assez fin et un faible ratio doivent être utilisés pour que les contours des pièces soient bien représentés par exemple, sinon les distorsions demeurent assez présentes.

La technique de contrôle de la distorsion est facile à utiliser. Elle sera privilégiée ici par rapport à ALE, car son utilisation est plus facile si on compare à ALE dont le choix des critères de remaillage au cours de la simulation peut être ardu pour des pièces complexes. En effet, le caractère évolutif du maillage au cours de la simulation rend certains choix de critères obsolètes au cours de la simulation et demande un travail itératif qui peut devenir coûteux.

On peut voir à la figure 6-13 la comparaison des trois résultats de simulation dans les mêmes conditions de simulations (seul le nombre d'éléments/particules varient légèrement). Les figures 6-14 à 6-16 quantifient l'efficacité de chaque méthode selon les critères de facilité d'utilisation de la méthode, le temps de calcul et la qualité de surface obtenue. Ce dernier critère est difficile à évaluer compte tenu du fait que nous ne disposons pas d'outils numériques pour évaluer la qualité de surface de manière précise, de ce fait, nous allons procéder à la mesure de la variation de hauteur sur des surfaces supposées

planes pour avoir une idée. Par ailleurs, ce critère est difficile à évaluer pour la méthode SPH compte tenu de la nature des particules, il ne sera pas donc considéré pour cette dernière.

Pour chaque critère, trois points sont alloués à la méthode qui donne le meilleur résultat, deux points à la méthode occupant la deuxième position et un point à la méthode qui offre le moins bon résultat. Par exemple pour la figure 6-16, la méthode ÉF obtient trois points par ce que le temps de calcul est plus rapide sans ajout de quelconque technique de remaillage qui vient augmenter le temps. La figure 6-17 classe les trois méthodes en prenant en compte les différents critères d'évaluation utilisés.

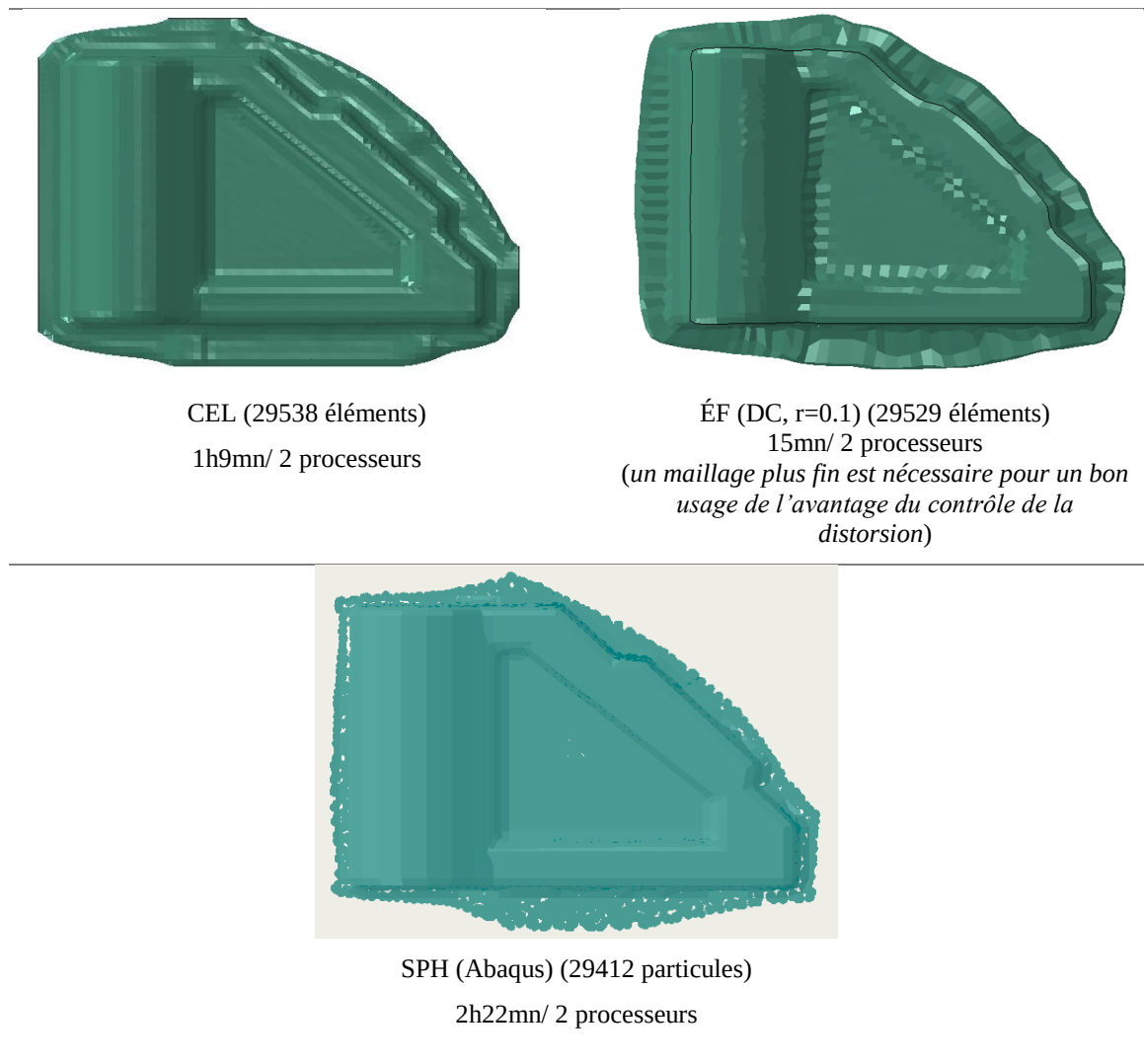


Figure 6 - 13 : Comparaison des résultats de simulation ÉF, CEL ET SPH

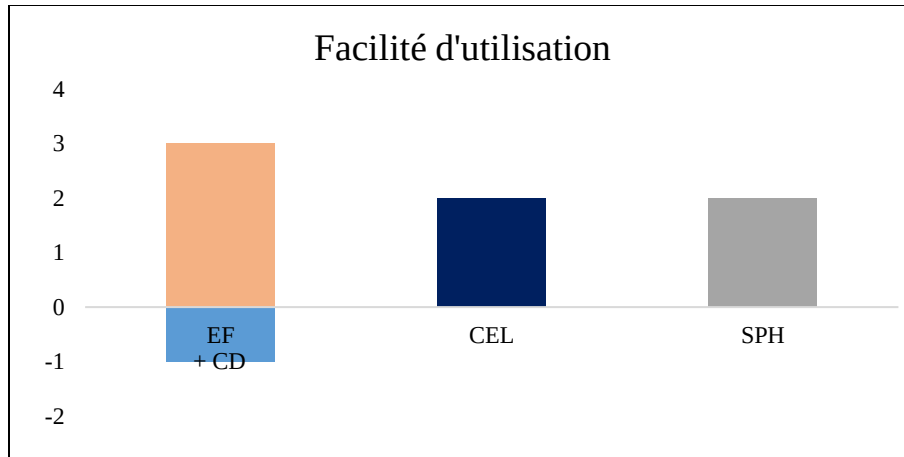


Figure 6 - 14 : Comparaison ÉF(CD)-CEL-SPH selon le critère de facilité d'utilisation

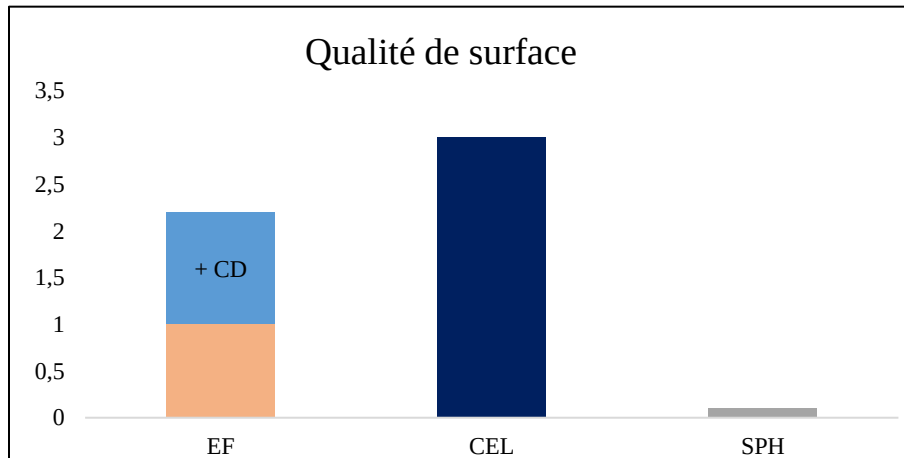


Figure 6 - 15 : Comparaison ÉF(CD)-CEL-SPH selon le critère de qualité de surface

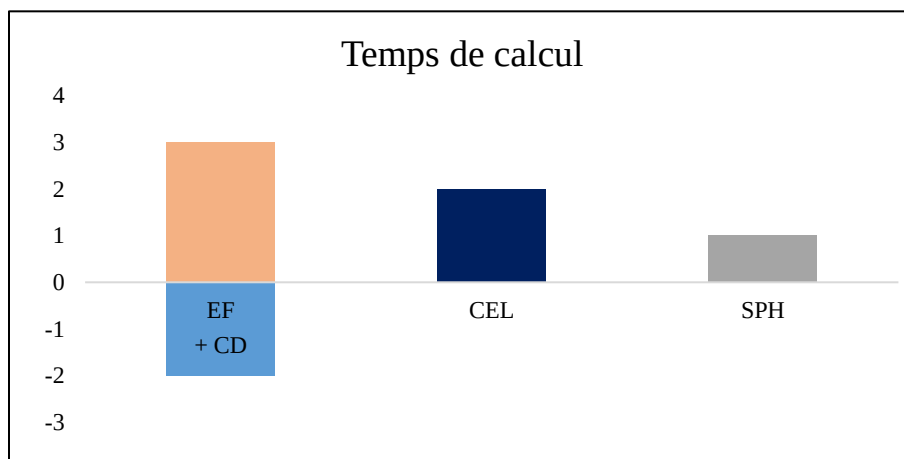


Figure 6 - 16 : Comparaison ÉF(CD)-CEL-SPH selon le critère de temps de calcul

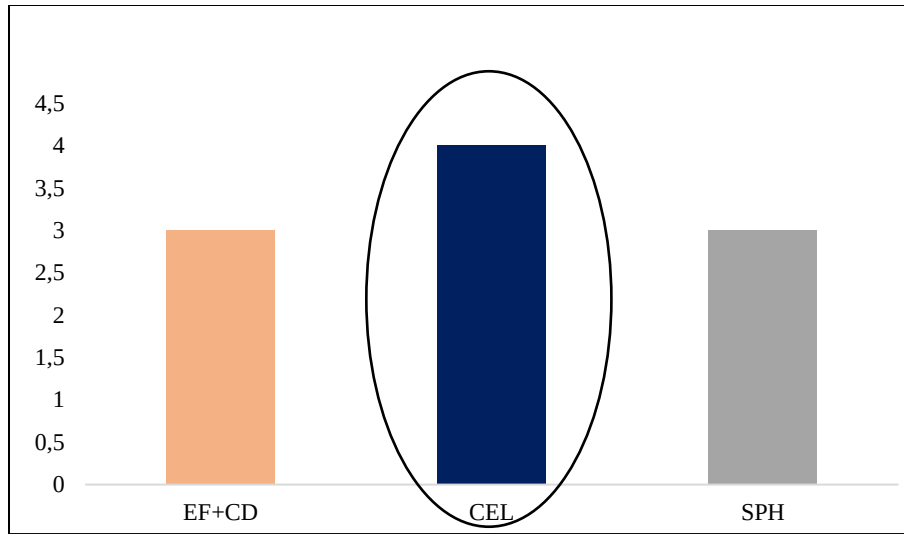


Figure 6 - 17 : Comparaison ÉF(CD)-CEL-SPH selon les critères d'évaluation

Cette comparaison nous amène à la conclusion que la méthode CEL offre ici un meilleur résultat. ÉF(CD) et SPH se situent au même niveau en omettant le critère de qualité de surface qui pour les raisons citées plus haut est difficile à évaluer pour la méthode SPH. Il faut souligner cependant que le temps de calcul est considérable en SPH dans sa formulation actuelle dans Abaqus (eulérienne), ce qui le désavantage devant ÉF même avec l'ajout du contrôle de la distorsion, raison pour laquelle, lorsqu'ÉF donne un bon résultat, l'utilisation de SPH ne s'avère pas nécessaire.

Cette problématique de temps de calcul considérable sera abordée à la section 6.5.4 traitant de l'amélioration de l'utilisation de la méthode SPH dans Abaqus par l'implantation du VUEL SPH en formulation lagrangienne. Ce qui permettra de diminuer considérablement le temps de calcul SPH.

6.5.3. Application avec un code SPH maison indépendant

Ce travail s'inscrit dans le cadre de la poursuite des travaux menés par Marie-Anne Lavoie [L7] et Qiwei He [H6] pour l'amélioration d'un code SPH maison au sein du laboratoire de recherche M3C. Le code est initialement basé sur la formulation de Liu & Liu [L5] structuré comme on peut le voir à la figure 6-18. La contribution dans cette thèse consiste à faire un couplage thermomécanique et de transformer le code développé en un VUEL SPH thermomécanique en formulation lagrangienne totale dans Abaqus afin de pouvoir utiliser SPH de manière efficace pour des problèmes thermomécaniques tel que le forgeage, le soudage ou l'usinage.

La simulation du forgeage est un problème multiphysique comme nous l'avons déjà exposé dans les chapitres précédents. La mécanique des milieux continus permet de prévoir les contraintes et les déformations, la thermique donne l'évolution du champ de température, la métallurgie donne la présence de différentes phases, la taille des grains et la mécanique de la rupture prévoit l'état de la structure du matériau (fatigue, zones d'amorçage de fissures). Dans ce travail de développement numérique, nous nous concentrons sur les phases mécanique et thermique plus particulièrement. Notre contribution à la modélisation thermomécanique en SPH s'inscrit dans le cadre de notre contribution scientifique pertinente et intéressante : d'une part, les modèles SPH thermomécaniques sont récents et encore en développement, notamment SPH en configuration lagrangienne totale et d'autre part le code maison permet de simuler en SPH avec des lois particulières qui ne sont pas forcément présentes dans les codes commerciaux de calcul tel que le modèle de Jonson-Cook modifié. Par ailleurs SPH thermomécanique n'est pas offert par Abaqus, le code est ainsi une alternative intéressante pour l'étude de la méthode appliquée au forgeage à chaud et au procédé d'usinage.

Les interactions thermomécaniques dont il faut prendre en compte dans le code SPH ont été présentées au chapitre 2.

La structure du code SPH est décrite ci-dessous (figure 6-18). Tel qu'on peut le voir, le sous-programme time integration est le sous-programme principal. Il assure le calcul des nouvelles variables (densité, accélération, force externe, force interne) (voir figure 6-3).

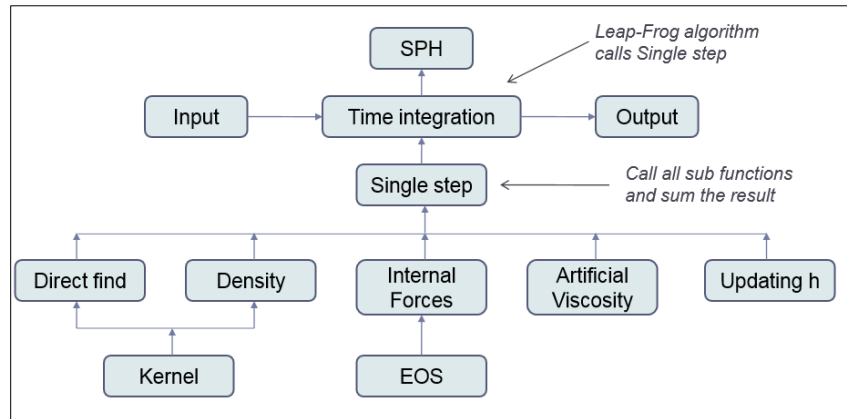


Figure 6 - 18 : Structure du code SPH [L14]

a) Test de validation du code maison SPH

Le test reproduit ici est le même que dans les cas précédents, soit une compression d'un échantillon cylindrique de 25,4 mm de diamètre et 25,4 mm de hauteur à 400°C, à une vitesse de 2,54 mm/s avec la loi de comportement de Johnson-Cook.

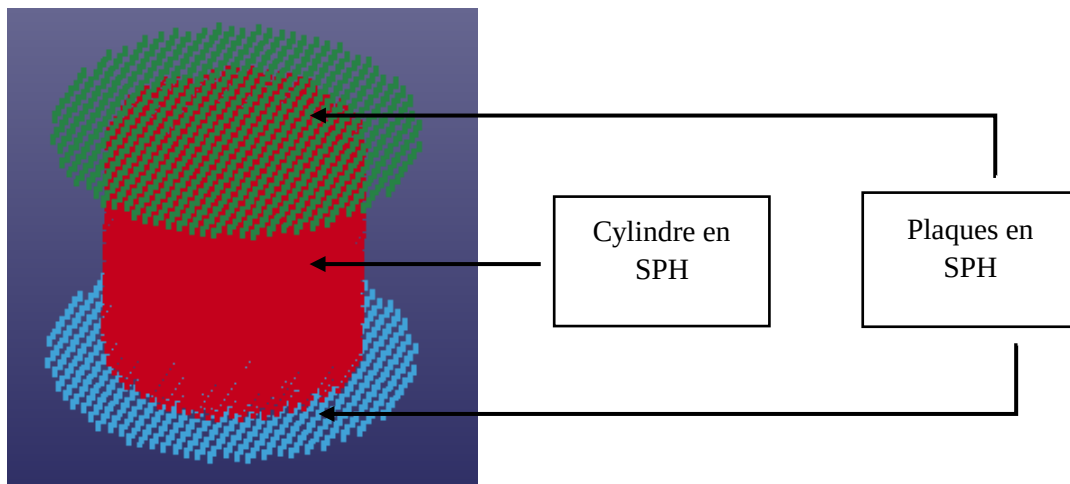


Figure 6 - 19 : Test de compression en SPH

Les résultats sont comparés ci-dessous avec les résultats expérimentaux (figures 6-20 et 6-21)

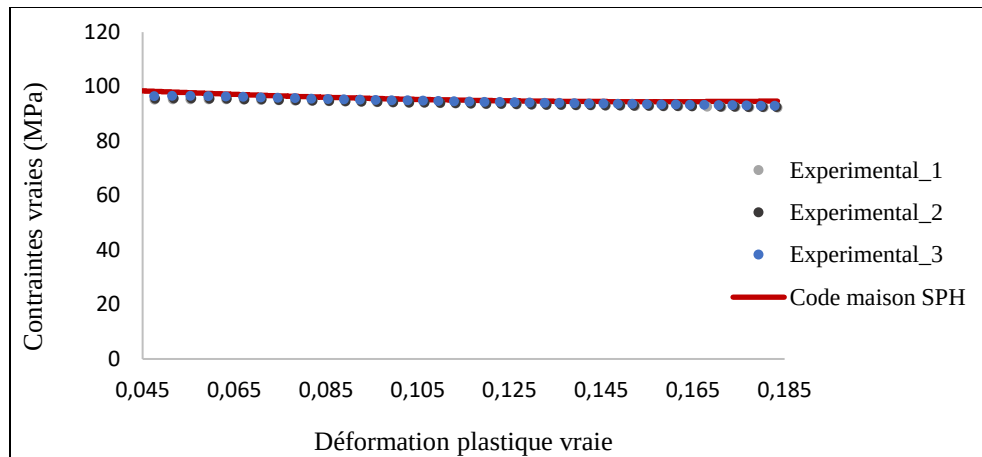


Figure 6 - 20 : Courbes contraintes-déformation : Expérimental versus code maison SPH

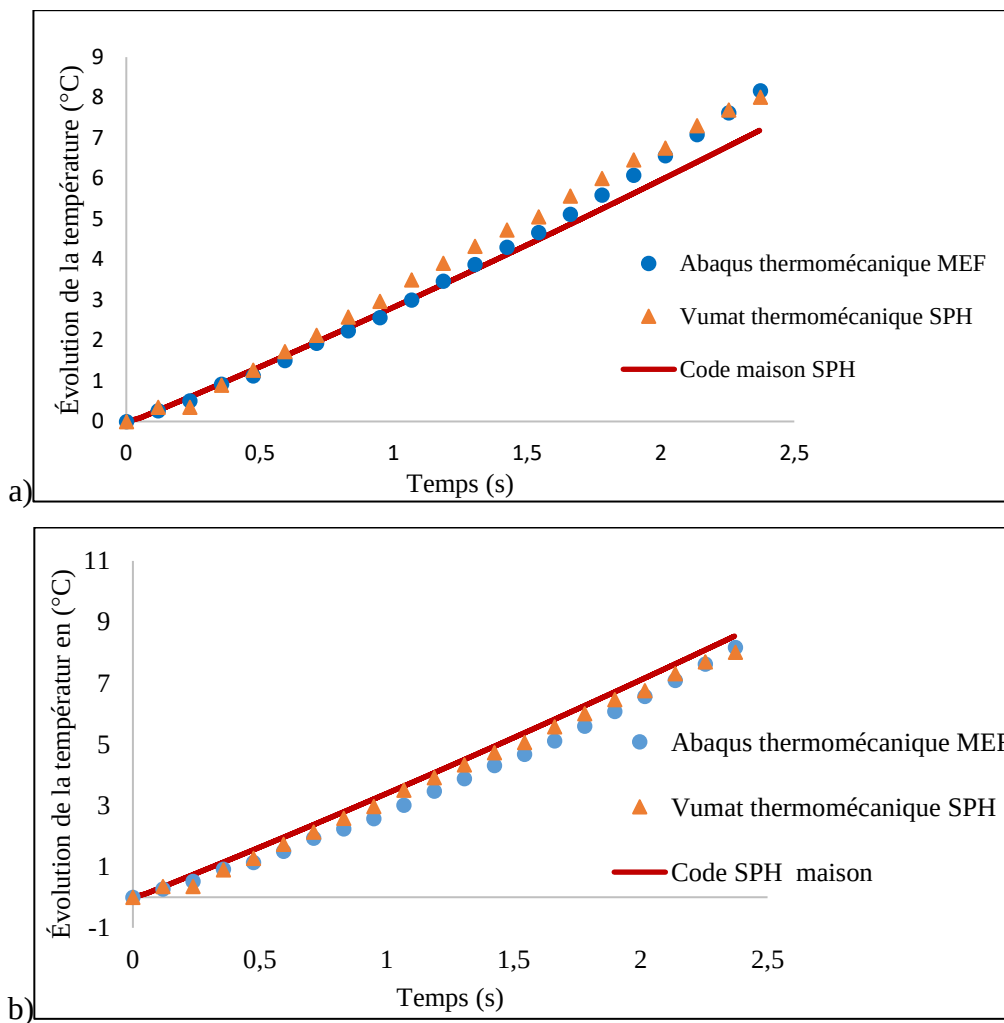


Figure 6 - 21 : Courbes d'évolution de la température : Abaqus MEF versus le VUMAT SPH versus le code SPH maison : a) en considérant la convection et b) en négligeant la convection

En comparaison avec les courbes obtenues par ÉF dans Abaqus et le VUMAT, on remarque que les résultats du code maison sont satisfaisants. Une erreur de moins de 5% est obtenue. Par ailleurs, l'étude de la prise en compte de la convection (qui n'est pas pris en compte dans la simulation avec Abaqus ÉF) montre que, pour ce cas de figure de test de compression, la convection serait négligeable s'il y avait contact avec l'air ambiant durant le test. La viabilité du code maison SPH thermomécanique en formulation lagrangienne totale est ainsi démontrée. Cependant, l'utilisation du code nécessite à ce stade une itération au niveau du pas de temps. Un pas de temps trop faible allonge le calcul de manière disproportionnée et joue sur la précision des résultats car en effet le pas de temps intervient dans le calcul de la contrainte d'écoulement. La condition CFL (Courant-Friedrichs-Levy) permet d'avoir une bonne première approximation.

On propose maintenant de comparer les trois sources de chaleur (source interne de chaleur, conduction et convection) afin de quantifier leur apport lors du forgeage et de valider notre hypothèse de départ sur le fait de négliger la convection lors du test.

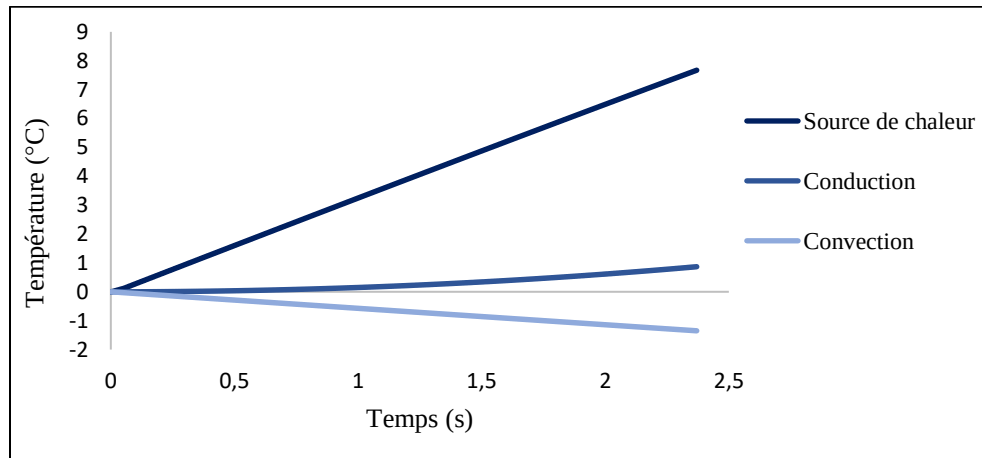


Figure 6 - 22 : Évolutions de température selon les sources de chaleur lors du test de compression

La figure 6-22 montre les évolutions de température observées selon les trois différentes sources de chaleur. On remarque clairement la prévalence de l'apport de la source interne de chaleur sur la convection et la conduction. Tel que posé dans notre hypothèse de départ, la convection est négligeable, le contact avec l'air est restreint. Quant

à la conduction entre les particules SPH, elle est faible, cela s'explique par le fait qu'on a une analyse isotherme et que le gradient thermique est faible.

Toutefois, pour des cas où le forgeage est anisotherme, ou lorsque le forgeage donne lieu à des bavures importantes, un gradient thermique plus significatif pourrait être noté et la variation de température due à la conduction serait alors plus considérable.

b) Cas de forgeage simple

Afin de valider l'efficacité de notre code dans un cas de forgeage plus poussé que le test de compression, nous allons comparer les résultats de simulation d'Abaqus en ÉF avec les résultats du code SPH. Cet exemple est essentiellement numérique et aucune comparaison avec l'expérimental ne sera présentée. On s'intéresse ici à l'étude de l'efficacité numérique du code maison vis-à-vis d'Abaqus ÉF ; pour les mêmes conditions de chargement, obtient-on des résultats valides avec le code SPH ?

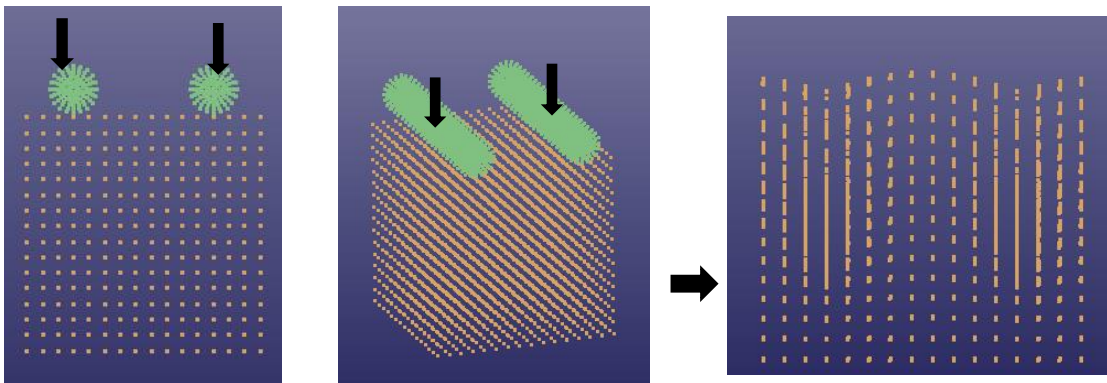


Figure 6 - 23 : Exemple simple de forgeage : code SPH maison

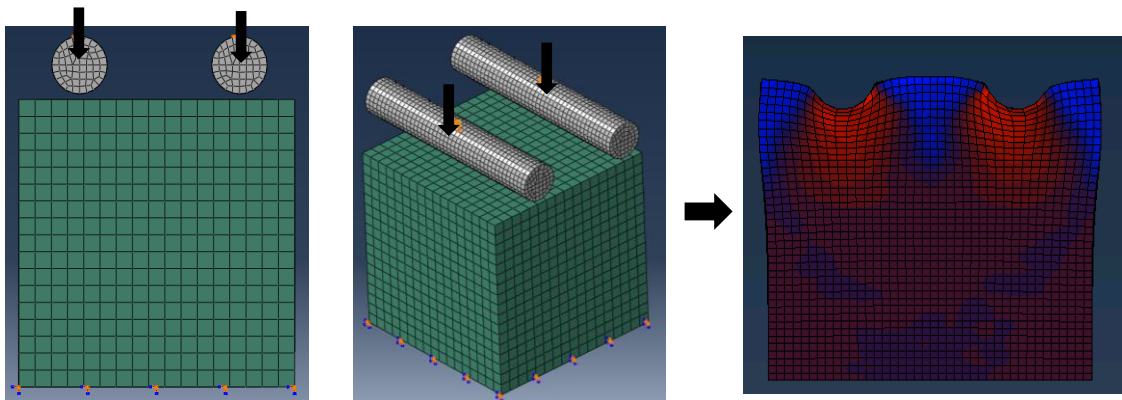


Figure 6 - 24 : Exemple de simulation de forgeage : MÉF Abaqus

Comparaison des résultats de simulation Abaqus versus code maison

Nous allons tracer les courbes de contraintes et d'évolution de la température dans la zone de concentration de contraintes maximales (voir figures 6-25 et 6-26).

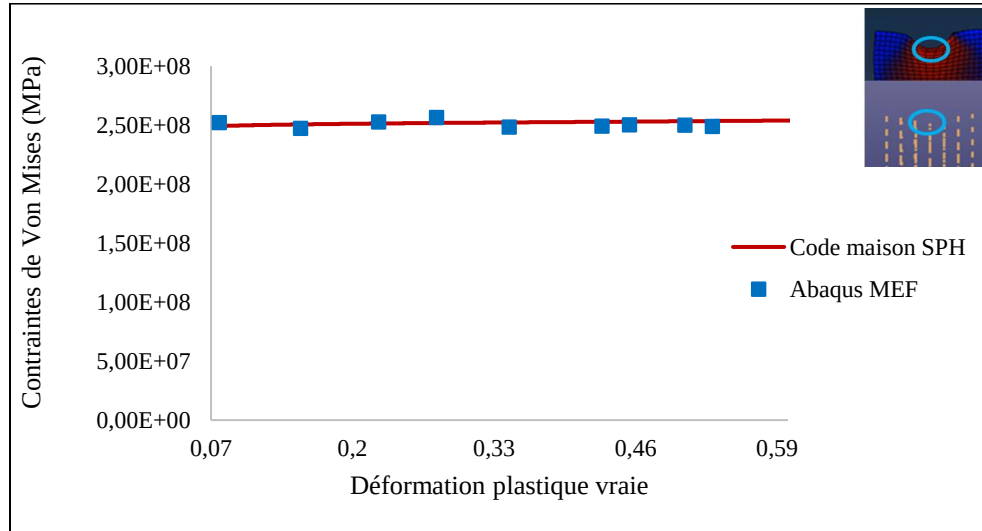


Figure 6 - 25 : Évolution des contraintes en fonction de la déformation

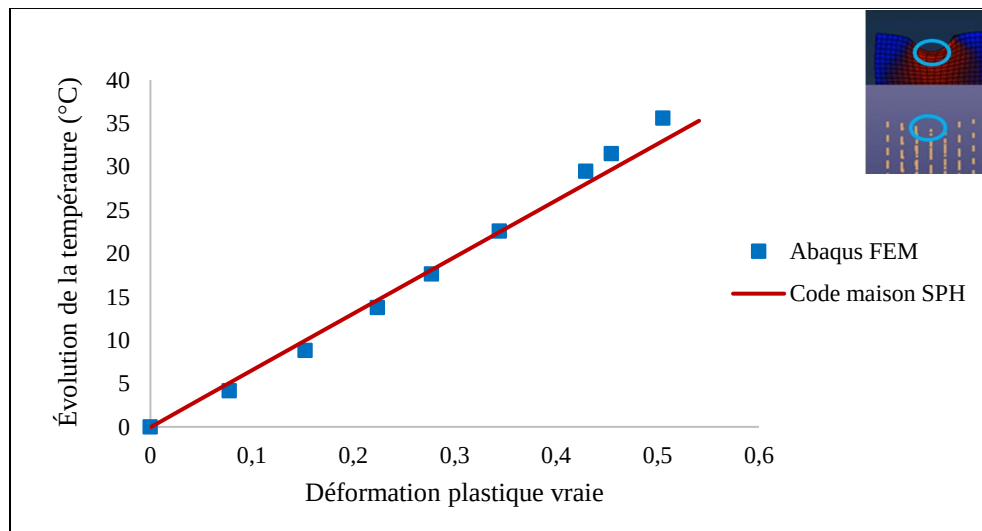


Figure 6 - 26 : Évolution de la température à différents nœuds dans le temps

Le code maison ne donne pas de profil de contraintes sur la pièce comme on pourrait le voir avec Abaqus, les résultats sont recueillis dans un fichier donnant l'évolution des différentes variables pour chaque particule à chaque pas de temps. Avec ces données on

peut faire la comparaison avec les résultats d'Abaqus sous forme de courbes de contraintes-déformation et de température-temps.

Les courbes d'Abaqus et celles du code sont similaires, le code reproduit les résultats d'Abaqus avec une précision moyenne de 1.31% pour les contraintes et 5.17% pour la température, ce qui relativement faible.

Au regard de ces observations, on est à même de conclure sur la fiabilité des résultats obtenus par le code maison. Toutefois, certaines améliorations sont encore à faire pour le rendre plus efficace et compétitif vis-à-vis des codes commerciaux, il s'agit entre autres de l'amélioration de l'interface graphique pour le rendre convivial «user friendly», par exemple l'affichage des profils de contraintes et de déformation sur la pièce déformée et la lecture et la comparaison directe des résultats d'analyse.

C'est dans le but de rendre accessible les développements SPH associés au code maison que nous avons décidé de contribuer au rehaussement du code commercial Abaqus en y implémentant la technologie SPH du code maison via le développement et l'implémentation d'un nouvel élément SPH thermomécanique lagrangien par l'utilisation de l'utilitaire VUEL («user element») d'Abaqus.

6.5.4. Application via un VUEL d'Abaqus

Cette contribution permettra d'améliorer l'utilisation de la méthode SPH dans Abaqus par l'introduction de l'analyse thermomécanique en formulation lagrangienne qui est plus adaptée pour la simulation des problèmes de mise en forme en mécanique des solides (usinage grandes vitesses, forgeage etc.). Ceci se fait par l'implémentation d'un code externe via l'utilitaire « user element » (VUEL) d'Abaqus qui permet à l'utilisateur de calculer lui-même l'ensemble du système discret : matrice masse, efforts intérieurs et extérieurs, loi de comportement en se basant sur une formulation thermomécanique inexistant dans Abaqus.

Notre formulation est comparée avec celle d'Abaqus par des exemples de validation (« benchmarks ») : impact de Taylor et compression latérale en grandes déformations. Les étapes de modélisation d'un VUEL dans Abaqus sont présentées en annexe 2.

6.5.4.1. Exemples d'applications et de validation

Des exemples de validation usuels en grandes déformations tel que l'impact de Taylor (figure 6-27) et le test de compression latérale (figure 6-29) sont présentés ci-dessous.

a) Impact de Taylor

Un tube en aluminium est impacté sur une surface rigide à grande vitesse. Cet exemple fait intervenir de grandes déformations et un écoulement important à l'interface d'impact, 8608 particules sont utilisées pour un temps d'impact de 4e-3s et une vitesse d'impact de 221m/s.

On présente ci-dessous les résultats de simulation et la comparaison avec l'expérimental.

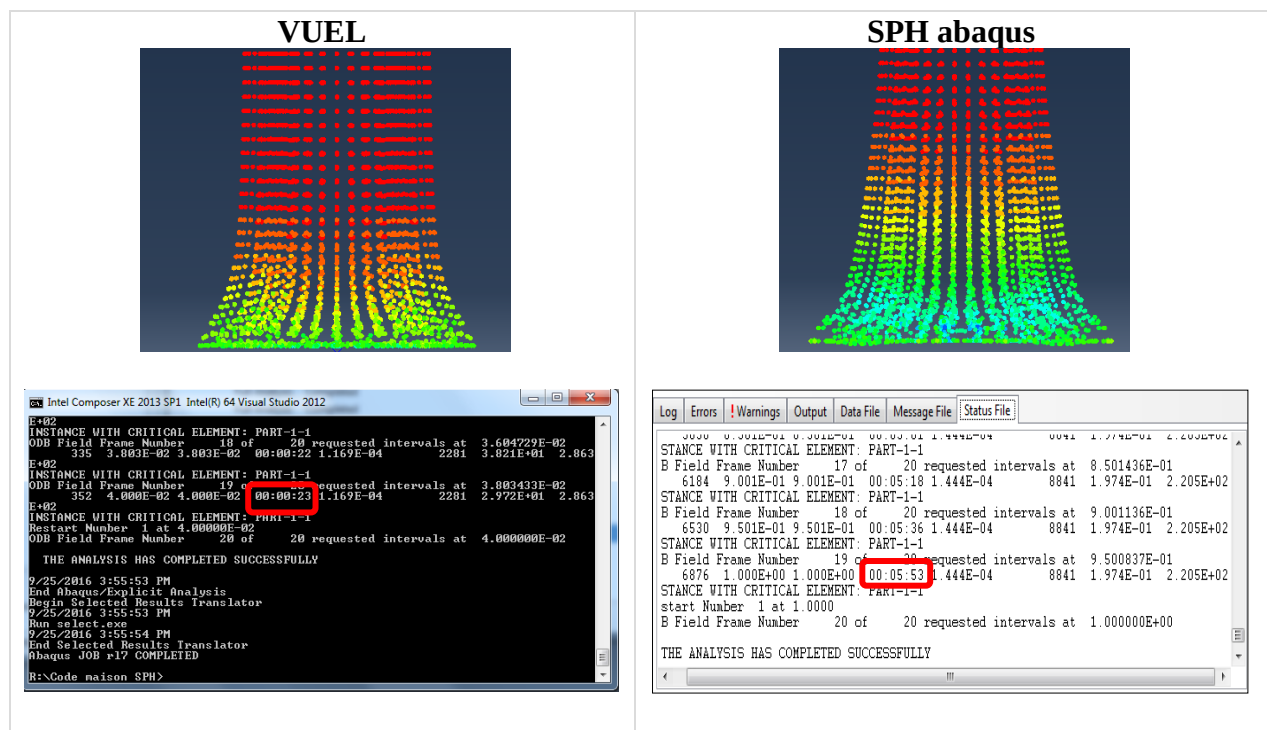


Figure 6 - 27 : Test d'impact de Taylor : Comparaison de SPH Abaqus et du VUEL avec le résultat expérimental du test

Tableau 6 - 2 : Tableau comparatif des résultats du test d'impact de Taylor [L7]

	Hauteur H [mm]	Diamètre D [mm]	Largeur W [mm]	Δ (Erreur)
Test expérimental	19,8	13,7	8,8	--
Abaqus Eulerian	17,53	13,15	9,54	7,96%
VUEL lagrangien	19,35	13,71	8,96	1,39%

L'erreur par rapport à l'expérimental est calculée selon les dimensions initiales et finales de la pièce [H5], la figure 6.28 montre le schéma de la pièce après impact.

$$\% \text{ error} = \frac{1}{3} \left(\frac{|\Delta W|}{W_{test}} + \frac{|\Delta D|}{D_{test}} + \frac{|\Delta H|}{H_{test}} \right) \times 100\% \quad (6.71)$$

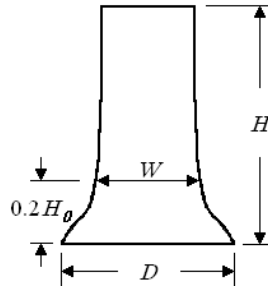


Figure 6 - 28 : Schématisation de l'échantillon déformé.

Les résultats de comparaison du tableau 6-2 montre une précision meilleure du VUEL par rapport à SPH Abaqus. Si on considère le temps de calcul, le VUEL est 15 fois plus rapide (le temps de simulation est de 5mn 53s pour le cas Abaqus et 23s pour le cas du VUEL). SPH étant particulièrement efficace pour les cas de simulation de problème en dynamique rapide, le VUEL et de sa formulation lagrangienne permettent d'exploiter cet avantage en supprimant les inconvénients temporelle et numérique (instabilité en tension) de la formulation eulérienne.

b) Compression latérale

Un exemple similaire au test de compression latérale présenté au chapitre 3 est repris. Les temps et vitesse de simulation ont été modifiés afin d'accélérer les simulations. Il s'agit également d'un test avec de grandes déformations et long à simuler. Le nombre de particules SPH est de 5313. Le test s'effectue pendant 1s à une vitesse de 30mm/s. On présente ci-dessous les résultats de simulation et la comparaison avec l'expérimental.

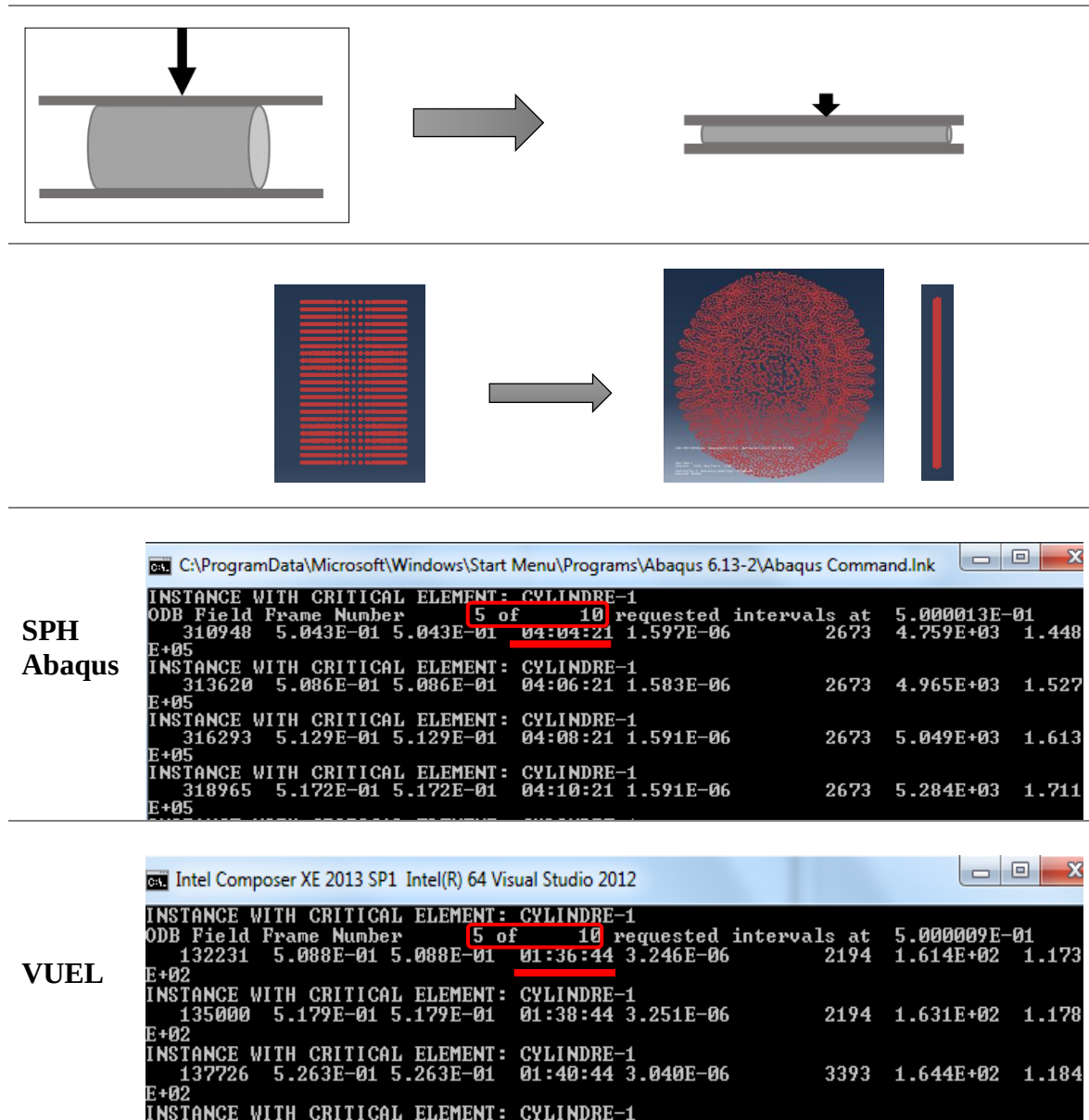


Figure 6 - 29 : Test de compression latérale SPH Abaqus vs VUEL : comparaison du temps de simulation

Observations :

L'intérêt de SPH en formulation lagrangienne se fait bien voir dans ces deux exemples.

En premier lieu, l'exemple de Taylor simulé en analyse mécanique afin de travailler sur une même base de comparaison, montre un problème d'instabilité en tension avec le code d'Abaqus, on rappelle que les problèmes d'instabilité en tension proviennent du fait que l'approche SPH étant lagrangienne par construction, du point de vue numérique, l'utilisation d'un noyau eulérien fait apparaître une instabilité lorsque les particules sont dans un état de tension. Ce problème est corrigé dans le cas du VUEL où le noyau est modélisé en lagrangien. Dans la formulation eulérienne, les particules se déplaçant de manière inadéquate, on perd de la précision au niveau des résultats.

Par ailleurs, les exemples confirment l'avantage du VUEL vis-à-vis de SPH Abaqus :

- temps de simulation plus faible, puisque qu'il n'est pas nécessaire d'actualiser les particules voisines qui restent les mêmes au cours de la simulation, le temps de calcul avec Abaqus plus grand (15 fois pour l'exemple d'impact de Taylor et 2.5 fois pour l'exemple de compression latérale).
- résultats plus précis grâce au couplage thermomécanique qu'Abaqus ne permet pas en SPH (voir figure 6-30).

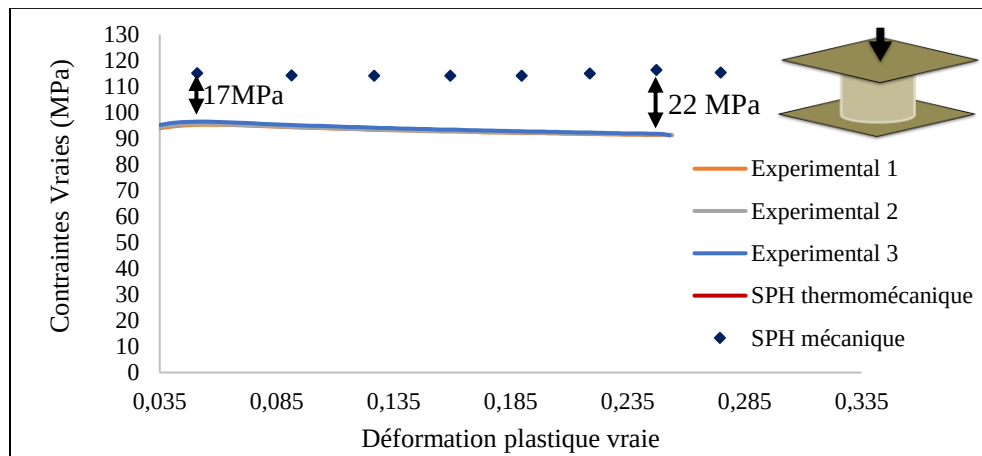


Figure 6 - 30 : Comparaison de SPH mécanique avec l'expérimental et SPH thermomécanique pour le test de compression étudié à la section 6.5.1

Ainsi le développement du VUEL est d'un grand intérêt pour tout utilisateur d'Abaqus désirant simuler un procédé thermomécanique en SPH. Il est cependant à noter qu'à cause des coûts de calcul, la méthode SPH n'est forcément toujours plus avantageuse pour des cas simples où la méthode des éléments finis donne déjà de très bons résultats. Si on considère la pièce simple, mis à part les zones de bavures, ÉF avec un bon contrôle de la distorsion ou CEL donnent déjà de bons résultats.

En guise d'ouverture vers de nouvelles possibilités, l'option de la conversion d'éléments finis en SPH est une piste intéressante à explorer. SPH étant coûteux, il serait intéressant de partir avec une pièce en éléments finis et convertir la portion de la pièce faisant face à de grandes déformations suivant un critère de conversion adéquat (contrainte seuil, déformation seuil, temps) comme c'est le cas présentement dans Abaqus. Ainsi le code serait à même de rivaliser avec certains codes commerciaux comme Abaqus ou Ls-dyna.

6.6. Conclusion

La contribution apportée ici au niveau de la modélisation en SPH thermomécanique ouvre une porte pour son utilisation dans Abaqus qui jusque-là offre une utilisation restreinte de SPH (formulation SPH mécanique avec des noyaux eulériens). Avec le VUEL d'une part et le code maison d'autre part, il nous est possible de modéliser avec SPH différentes lois de comportement pour différentes formulations.

Quant au VUMAT, bien que permettant de faire des simulations thermomécaniques, il reste moins avantageux que le VUEL. Car, il ne gère pas le type de formulation SPH dont la gestion incombe à Abaqus qui ne possède qu'une formulation eulérienne.

Pour le forgeage, les particules bien que soumises à de grandes déformations conservent leurs voisines (sauf peut-être exceptionnellement au niveau des bavures) tout au long de la mise en forme, l'utilisation d'une formulation eulérienne n'est donc pas avantageuse et est plus coûteuse.

Quant aux différents modèles développés en vue de la simulation du forgeage, ils ont été décrits et validés par des résultats expérimentaux ou par des résultats d'Abaqus.

Toutefois, il est important de souligner que le VUEL et le code maison laissent place à de l'amélioration. Par exemple un couplage fort au niveau de la résolution thermomécanique serait à même de fournir des résultats plus précis.

Chapitre 7

Conclusion générale et perspectives

L'objectif de ce travail de thèse était de contribuer à l'amélioration de la modélisation du forgeage et de ses outils de simulation par intégration de la modélisation du matériau et du procédé dans le design et l'optimisation d'une composante de train d'atterrissage. Différentes étapes d'investigations et de modélisations ont permis de mener à terme ce travail.

Le chapitre 7 donne une rétrospective du travail fait et une proposition de sujets à développer. Un retour sur les contributions de chaque chapitre vis-à-vis des objectifs définis permet d'avoir un résumé clair et complet du travail effectué.

Au **chapitre 1**, une revue de l'état de l'art a permis d'étudier les spécificités du procédé de forgeage, son évolution au cours des dernières années, certains des outils de simulation et des modèles de comportement utilisés pour une modélisation précise du forgeage à chaud. Il s'agit de lois de comportement intégrant d'une part, les paramètres matériaux telles que les propriétés thermomécaniques et les variables microstructurales et d'autre part, les paramètres procédés tels que la température et la vitesse de transformation (Johnson-Cook, Johnson-Cook modifié, MTS, Zireilli-Armstrong). De cette étude, le modèle de comportement de Johnson-Cook et le modèle de Johnson-Cook modifié permettant d'intégrer l'effet de la microstructure dans la loi de comportement ont été retenus pour la simulation du forgeage. Du point de vue outils de simulation, ce chapitre a fait ressortir trois méthodes à considérer, la méthode classique des éléments finis (ÉF), la méthode couplée eulérienne-lagrangienne (CEL) et la méthode «Smoothed Particle Hydrodynamics» (SPH). Ainsi, ce chapitre a permis de répondre en partie à deux des objectifs inscrits dans cette thèse, soit :

- 1) *Comprendre et améliorer l'intégration des paramètres procédés et matériaux dans la modélisation du procédé et*
- 2) *Comprendre et intégrer la prise en compte de l'évolution de la microstructure dans la modélisation du procédé.*

Pour comprendre les transformations thermomécaniques qui ont lieu lors du forgeage à chaud, un volet théorique axé sur les grandes déformations en mécanique des milieux continus a été présenté au **chapitre 2**. La cinématique et les interactions thermomécaniques et métallurgiques ont été considérées. Un modèle de comportement thermo-élasto-viscoplastique avec écrouissage et recristallisation dynamique a été présenté (Johnson-Cook avec effet de la recristallisation dynamique). Les équations régissant le couplage thermomécanique ont été dérivées ainsi que l'ensemble des lois de conservation d'évolution et de dissipation. La conduction et la convection ont été les deux modes d'échange thermique considérés, le rayonnement étant négligeable dans le cas du forgeage. Pour la résolution du système thermomécanique couplé, un schéma explicite et un schéma implicite ont été présentés. Le schéma explicite (Abaqus Explicit) a été utilisé dans ce travail pour la résolution du système avec un couplage faible (séquentiel). Une fois ce travail indispensable à la compréhension du procédé (géométrie et cinématique des outils, paramètres procédé et comportement du matériau, et les interactions thermomécaniques etc.) fait, nous sommes passés à la mise en œuvre numérique et expérimentale grâce aux outils de simulation numérique dans le premier cas et aux tests expérimentaux dans le second cas. Ce chapitre a permis de répondre à l'objectif *Comprendre et améliorer l'intégration des paramètres procédés et matériaux dans la modélisation du procédé*, car les modèles mathématiques ont permis de comprendre comment intégrer dans les équations de la mécanique des milieux continus, les différents paramètres matériau et procédé ainsi que le couplage thermomécanique.

Le **chapitre 3** est ainsi axé sur la caractérisation du matériau, la validation des outils de simulations adoptés et la modélisation numérique du forgeage. Des tests de compression et de traction ont permis de caractériser l'alliage 7175 sous différentes conditions de températures et de taux de déformation. Ce qui a conduit à une modélisation du matériau à

haute température avec le modèle de comportement de Johnson-Cook. Ces tests ont également permis de déterminer les paramètres nécessaires à l'intégration de la recristallisation dynamique dans le modèle de Johnson-Cook modifié. La comparaison des résultats de simulation des deux modèles de Johnson-Cook (standard et modifié) avec des résultats expérimentaux a montré que pour des niveaux de déformation assez élevés au-delà de la température de recristallisation, le modèle de Johnson-Cook modifié est plus précis, une meilleure corrélation avec l'expérimental est obtenue. Du point de vue des outils de simulations, la comparaison des résultats en ÉF et en CEL a été effectuée. Il a été démontré que la méthode des éléments finis fait face à des difficultés liées à la distorsion du maillage en grandes déformations. Ce qui nous a amené à considérer la méthode CEL qui permet une bonne gestion des grandes déformations et est très «user friendly». Également dans ce chapitre, on a présenté la mise en œuvre numérique et expérimentale d'une pièce simple représentative de la pièce industrielle (design des matrices et de la pièce, forgeage, refroidissement). Les résultats de simulation comparés aux résultats de forgeage réel ont permis de valider la méthodologie de simulation adoptée. Dans ce chapitre, plusieurs objectifs de la thèse ont été atteints :

- 1) Procéder à la caractérisation thermomécanique de l'alliage AA7175 : des tests de compression et de traction sous différentes conditions de température et de déformation ont été effectués ainsi que des métallographies qui nous ont édifiés sur l'état microstructural du matériau avant et après la mise en forme.*
- 2) Mieux comprendre et améliorer le processus intégré du procédé qui inclut le chauffage, le forgeage multi-étape à chaud (étape de préformage et de finition) et le refroidissement : cet objectif a été atteint grâce à la modélisation multi-étape et continue de la pièce simple où chaque étape du processus a été calibré et validé avec des simulations pour que les intrants des étapes subséquentes soient précis et que les résultats obtenus soient conséquents.*
- 3) Comprendre et améliorer l'intégration des paramètres procédés et matériaux dans la modélisation du procédé : l'investigation au niveau de l'influence de l'anisotropie et de la symétrie du matériau (paramètre matériau) ainsi que de*

l'influence de la vitesse de déformation (paramètre procédé) sur les propriétés ont permis de répondre à ce besoin.

4) *Comprendre et intégrer la prise en compte de l'évolution de la microstructure dans la modélisation du procédé* : l'étude de l'effet de la recristallisation dynamique sur des propriétés du matériau et sa modélisation répondent partiellement à cet objectif. En effet, bien que cette étude nous ait permis d'inclure la recristallisation dynamique dans la modélisation, il y a encore plusieurs paramètres d'intérêt (taille, forme et orientation des grains) dont la prise ne compte est une nécessité pour une modélisation complète.

Le **chapitre 4** est consacré à l'analyse des résultats de forgeage de la pièce simple effectués au chapitre 3. L'étude des contraintes résiduelles et des effets du traitement thermique de trempe sur ces dernières ont été abordés. Les propriétés finales de la pièce ont ainsi été déterminées. Dans ce chapitre, l'objectif *Étudier l'état de contraintes résiduelles après forgeage dont la présence affecte la qualité de la pièce et les moyens de les diminuer grâce aux traitements thermiques* est atteint. En effet, l'étude effectuée dans ce cadre a permis de quantifier les contraintes résiduelles et de connaître la nature de ces dernières (tension ou compression). Le traitement thermique de trempe auquel nous avons soumis les pièces forgées ont permis de modifier la nature des contraintes résiduelles en surface, de contraintes en tensions en contraintes en compression préférables pour stopper d'éventuelles fissures.

Le **chapitre 5** porte sur l'application du processus de modélisation et simulation du forgeage, développé précédemment sur la pièce simple, au modèle de la pièce industrielle. Les résultats de simulation et de caractérisation expérimentale de la pièce industrielle y sont présentés. Les propriétés de la pièce simple sont comparées avec celles de la pièce industrielle (après préforgeage). On note en particulier qu'étant donné le refroidissement plus rapide après forgeage de la pièce simple, les propriétés mécaniques mesurées sont plus élevées que celles trouvées dans la pièce industrielle après pré-forgeage.

Le **chapitre 6** porte sur la méthode «smoothed particle hydrodynamics» (SPH) abordée sous formulation eulérienne et lagrangienne. Après avoir présenté les principes de

la méthode et quelques développements mathématiques (discrétisation des équations, lois de conservations, intégration numérique etc.), une comparaison de la méthode SPH sous formulation eulérienne avec la méthode des éléments finis en formulation lagrangienne classique (ÉF) et la méthode des ÉF en formulation couplée eulérienne-lagrangienne (CEL) a été effectuée. La méthode CEL s'est avérée être très intéressante tant au niveau de la facilité d'utilisation que de la qualité des résultats obtenus en grandes déformations. Quant à la méthode des ÉF classique, les distorsions en grandes déformations la désavantage en raison d'une divergence possible du processus de résolution. Pour ce qui de la méthode SPH en formulation eulérienne, le temps de calcul est souvent prohibitif pour des problèmes réalistes en 3D et les problèmes d'instabilité en tension auxquels elle est confrontée ne militent pas en sa faveur. Aussi, pour atténuer et éliminer certains de ces désavantages une formulation lagrangienne totale a été proposée et implémentée dans un code SPH maison et dans un VUEL d'Abaqus. Cette formulation conduit à de meilleures performances de la méthode SPH en permettant d'obtenir des temps de calcul compétitifs et une qualité améliorée des résultats. Des exemples simples d'essais de compression axiale et latérale et d'impact de Taylor ont en particulier montré des performances remarquables du VUEL. En effet pour l'exemple d'impact de Taylor en SPH, la vitesse de traitement est jusqu'à **15** fois plus rapide pour la formulation SPH existant dans Abaqus, alors que pour le test de compression latérale quasi-statique en grandes déformations notre formulation est 2.5 fois plus rapide. Ce chapitre répond à l'objectif *Contribuer à l'amélioration de la méthode de simulation SPH en thermomécanique*. La contribution de la thèse pour cet objectif est d'un certain intérêt pour les différentes étapes de fabrication de la pièce industrielle grâce au code SPH maison et au VUEL Abaqus. L'élément de l'utilisateur VUEL SPH thermomécanique en formulation lagrangienne offre la possibilité de modéliser des problèmes thermomécaniques dans Abaqus avec une meilleure stabilité et un temps de calcul réduit. Elle pourrait être exploitée avantageusement dans les simulations de l'usinage rapide.

Travaux futurs

Au terme de ce travail, je reste consciente que des recherches futures sont nécessaires pour approfondir davantage les études menées, la durée limitée d'une thèse de doctorat n'ayant pas permis de le faire. Ainsi, il y a encore du travail à faire dans différents aspects liés au procédé, au matériau et aux outils de simulation :

Ainsi à court terme, il faudrait réaliser les travaux suivants qui permettraient de compléter et exploiter les résultats obtenus dans ce mémoire :

- Une prise en compte de la déformabilité des outils, les outils étant supposés rigides tout au long de la mise en forme présentement ;
- Une amélioration du couplage thermomécanique, en termes de couplage fort ;

A moyen terme et long terme :

- Il serait également intéressant de modéliser dans le VUEL un couplage ÉF-SPH. En effectuant une conversion locale en SPH sur une pièce maillée en ÉF, on gagnerait davantage sur le temps de calcul sans avoir les problèmes de distorsion qui pourraient être rencontrés en ÉF.
- Une modélisation plus précise de l'effet de la microstructure, en ajoutant au modèle l'évolution de la taille des grains ;
- Une modélisation d'un modèle de frottement évolutive au cours de la mise en forme pour obtenir une meilleure précision des résultats notamment la contrainte d'écoulement du matériau.

Références Bibliographiques

- [A1] U. R. Andrade, M. A. Meyers and A. H. Chokshi, (1994), «Constitutive description of work and shock hardened copper. », Scripta Metallurgica et Materialia, 30 (7), 933–938.
- [A2] ASTM International, (2002), « Standard test method for determining residual stresses by the hole-drilling strain-gage method», E 837-01. West Conshohocken (PA) USA: ASTM International, 10 p.
- [A3] J. D. Anderson, (1995), «Computational fluid dynamics: the basics with applications», McGraw-Hill.
- [A4] C. Aliaga, (2000), «Simulation numérique par éléments finis en 3D du comportement thermomécanique au cours du traitement thermique d'aciers : application à la trempe de pièces forgées ou coulées, Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2000.
- [A5] Azom, (2002), «Aluminium Forging - Reasons Why Forged Aluminium is a Suitable Solution for Many Applications», Materials Australia, Vol. 34, no. 2, pg. 18, March/April 2002. Primary author: Tim Cocking.
- [A6] T. Altan, G. Ngaile and G. Shen, (2004), «Cold and Hot Forging: Fundamentals and Applications, Volume 1», ASM international, Chapter 17 by P. Mangunkia.
- [A7] J. de Arizon, E. Filippi, J. Barboza and L. D'Alvise, «A Finite Element simulation of the hot forging process», Faculté Polytechnique de Mons, Service de Génie Mécanique.
- [A8] R. K. A. Al-Rub, (2004), «Material length scales in gradient-dependent plasticity / damage and size effects: theory and computation», Thèse de Doctorat, Louisiana State University.

- [B1] J. A. P. Barboza (2004), «Traitement du contact entre corps déformables et calcul pour la simulation 3D du forgeage multicorps», Thèse de Doctorat, l'École Nationale Supérieure des Mines de Paris
- [B2] B. Banerje, (2007), «The Mechanical Threshold Stress model for various tempers of AISI 4340 steel», *International Journal of Solids and Structures* 44 (2007) 834–859.
- [B3] J. Bonet, R. D. Wood (1997), «Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis» Livre, Cambridge university press.
- [B4] G. Boothroyd, P. Dewhurst, W. Knight, (2002), « Product design for manufacture and assembly», 2ème edition, chapter 14 Design for hot forging.
- [B5] P-O. Bouchard, N. Caillet et Y. Chastel, (2008), «Vers une optimisation de la tenue à la fatigue de pièces forgées intégrant l'histoire mécanique des matériaux», *European Journal of Computational Mechanics* 17, 3 (2008) Pages 283-301", DOI : 10.3166/remn.17.283-301.
- [B6] R. S. Barker, and J. G. Sutton, (1967), «Stress Relieving and Stress Control», *ALUMINUM Vol. III –Fabrication and Finishing*, 1967, ASM, Metals Park, OH. P355-382.
- [B7] T. Belytschko, Y. Guo, W. Liu and X. S. P., (2000), «A unified stability analysis of meshless particle methods», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 48, 2000, p.1359-1400, Wiley Online Library.
- [B8] K. Ba, A. Gakwaya, J. Lévesque et M. Guillot, (2015), «Hot forging process simulation for aerospace aluminium alloy using a coupled Eulerian Lagrangian formulation», *AMCAA - America's Conference on Al Alloys*.
- [B9] K. Ba, A. Gakwaya, J. Lévesque et M. Guillot, (2016), « Hot forging process simulation for aerospace aluminium alloy using a modified Johnson-Cook equation», *55th Annual Conference of Metallurgists*.

- [B10] G. Bostborge, H. Faure et Y. Gobard, (2001), «Forgeage à froid de l'acier - Choix de l'acier et procédés», Référence M3085 v1 | Date de publication : 10 déc. 2001.
- [C1] N. Caillet, (2007), «Prise en compte des spécificités des pièces forgées en fatigue illimitées», Thèse de doctorat, École des mines de Paris.
- [C2] P. W. Cleary, Mahesh Prakash, Raj Das, Joseph Ha (2012), «Modelling of metal forging using SPH», Applied Mathematical Modelling 36 (2012) 3836–3855
- [C3] F. Caleyron, A. Combescure, V. Faucher et S. Potapov (2011), «Une méthode sans maillage pour la modélisation des interactions fluide-structure : Application à la rupture d'un réservoir sous impact », 10e Colloque National en Calcul des Structures, 9-13 Mai 2011, Presqu'île de Giens (Var)
- [C4] C. Castan, (2011), «Étude de la recristallisation au cours du laminage à chaud d'aciers à basse densité fer-aluminium», thèse de doctorat, École nationale supérieure des mines, Saint-Etienne.
- [C5] A. Castrataro, (2006), «Mesure et prédiction des contraintes résiduelles dans une turbine hydraulique de type Francis», Mémoire de maîtrise, École de technologie supérieure.
- [C6] J. Chen, J. Beraun and C. Jih, (1999), «An improvement for tensile instability in smoothed particle hydrodynamics», Computational Mechanics, vol.23 n°4, 1999, p. 279-287, Springer.
- [C7] T. Coupez, N. Soyris et J-L Chenot, (1991), «3D finite element modelling of the forging process with automatic remeshing», Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Centre de Mise en Forme des Matériaux, Journal of Materials Processing Technology, 27 (1991) 119-133.
- [C8] J-C. Charmet, (2007), «Mécanique du solide et des matériaux, Élasticité-Plasticité-Rupture», ESPCI - Laboratoire d'Hydrodynamique et Mécanique Physique.

- [C9] F. Caleyron, (2012), «Simulation numérique par la méthode SPH de fuites de fluide consécutives à la déchirure d'un réservoir sous impact », thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.

- [C10] N. Chobaut, J. Repper, T. Pirling, D. Carron and J-M. Drezet, (2012), «Residual stress analysis in as-quenched thick plates using neutrons and FE modelling », 13th International Conference on Aluminum Alloys (ICAA13), Edited by: Hasso Weiland, Anthony D. Rollett, William A. Cassada. TMS (The Minerals, Metals & Materials Society), 2012.

- [D1] R. D. Doherty, D. A. Hughes, F. J. Humphreys et al., (1997), «Current issues in recrystallization: a review», Materials Science and Engineering A, 238 (2), 219–274, 1997.

- [D2] A. Dorogoy et D. Rittel, (2009), «Technical note: Determination of the Johnson-Cook material parameters using the SCS specimen», Mechanical Engineering Department, Technion – Israel Institute of Technology.

- [D3] G. E. Dieter, (2003), «Handbook of workability and process design», ASM International, 2003, Chapter 14 Process Design in Impression Die Forging.

- [D4] D. Dziedzic and J. Majta, (2012), «Computer simulation aided studies on the impact transition temperature of microalloyed steel forgings», Archives of metallurgy and materials, volume 57, DOI: 10.2478/v10172-012-0060-1.

- [D5] G. Drouin, M. Gou, P. Thiry et R. Vinet, (2006), «Éléments de machines», deuxième édition revue et augmentée, Presse internationales Polytechnique.

- [D6] G. Dilts, (1999), «Moving-least-squares-particles hydrodynamics I, Consistency and stability», International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.44, n°8, 1999, p. 1115-1155, Wiley Online Library.

- [D7] CT. Dyka and RP. Ingel, (1995), «An approach for tension instability in smoothed particle hydrodynamics (SPH)», Computer and Structures 1995, vol.57, issue 4,17:573-580.

- [D8] G. E. Dieter, (2003), «Handbook of workability and process design», ASM International, 2003, chapter 11 Design for Deformation Processes.
- [F1] Thomas-Peter Fries, Hermann-Georg Matthies, (2004), «Classification and overview of meshfree methods», Technical University Braunschweig, Brunswick, Germany.
- [F2] M. François, J. M. Sprauel, C.F. Déhan, M.R. James, F. Convert, J. Lu, J.L. Lebrun, N. Ji et R.W. Hendricks, (1996), « X-ray diffraction method ». Handbook of measurement of residual stresses, sous la dir. de Lu, J., p. 71-132. Upper Saddle River (NJ) USA: Society for Experimental Mechanics.
- [F3] P. S. Follansbee and U. F. Kocks, (1988), «A constitutive description of the deformation of copper based on the use of the mechanical threshold stress as an internal state variable», Acta Metall., 36, 1988, p.81-93.
- [F4] T. Furu, H.R. Shercliff, C. Sellars, M. Ashby, (1996), «Physically-Based Modelling of Strength, Microstructure and Recrystallization during Thermomechanical Processing of Al-Mg Alloys», Material Science Forum, Volume 217-222, pp. 453–458, 1996.
- [G1] M. S. Gadala and J. Wang (1998), «A practical procedure for mesh motion in arbitrary Lagrangian-Eulerian method», Engineering with Computers (1998)
- Mots-clés : Arbitrary Lagrangian-Eulerian ; Mesh motion ; Metal forming
- [G2] A. Gakwaya (2015), «Mécanique des milieux continus », Notes de cours, Université Laval, Québec.
- [G3] J. Giusti, (1998), «Modélisation de la frappe et du forgeage à froid des produits longs en acier», Commission européenne.
- [G4] L. Goffin, (2013), «Development of a didactic SPH model», Maitrise, Université de Liège.

- [G5] J. Gray, J. J. Monaghan and R. Swift, (2001), «SPH elastic dynamics», *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 190, no 49-50, 2001, p. 6641–6662, Elsevier.
- [G6] G. C. Ganzenmüller, M. Sauer, M. May, et S. Hiermaier, (2016), « Hourglass control for Smooth Particle Hydrodynamics removes tensile and rank-deficiency instabilities », *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, vol. 225, n° 2, p. 385-395, mars 2016.
- [G7] Q. Guo-Zheng, (2013), « Characterization for Dynamic Recrystallization Kinetics Based on Stress-Strain Curves», *Materials Science » Metals and Nonmetals » "Recent Developments in the Study of Recrystallization"*, book edited by Peter Wilson, ISBN 978-953-51-0962-4, Published: February 6, 2013 under CC BY 3.0 license. © The Author(s).
- [G8] T. Ghetreffe, (1999), «Modélisation du comportement élasto-viscoplastique en grandes déformations», thèse de doctorat, École universitaire d'ingénieurs de Lille.
- [G9] A. Gakwaya, (1983), «Développements et applications de la méthode des éléments finis de frontière à la mécanique des solides», Thèse de doctorat, Université Laval.
- [G10] A. Gakwaya, H. Sharifi, M. Guillot, M. Souli, F. Erchiqui. (2011), «ALE formulation and simulation techniques in integrated computer aided design and engineering system with industrial metal forming applications. », (English) *CMES, Comput. Model. Eng. Sci.* 73, No. 3, 209-266 (2011).
- [H1] SM. Hussaini and AK. Gupta, (2012), «Mechanical threshold stress model for prediction of flow stress», *International Conference on Materials Processing and Characterization* March 8-10, 2012, Hyderabad.
- [H2] A. Hor (2011), «Simulation physique des conditions thermomécaniques de forgeage et d'usinage-caractérisation et modélisation de la rhéologie et de l'endommagement», Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers.

- [H3] C. Hirsch, (1988), «Numerical Computation of Internal and External Flows», Wiley- Interscience publication, volume 1.
- [H4] F. Hamon, (2010), «Modélisation du comportement mécanique en fissuration d'alliages aéronautiques», thèse de doctorat, École nationale supérieure de mécanique et d'aérotechnique.
- [H5] T. Holmquist et G. Johnson, (1991), «Determination of constants and comparison of results for various constitutive models», Journal de Physique IV Colloque, 1991, 01 (C3), pp.C3-853-C3-860. <10.1051/jp4:19913119>. <Jpa-00249922>.
- [H6] Q. He, (2016), «Numerical tests of stabilized corrected SPH method», laboratoire M3C, Université Laval.
- [I1] A. Ibrahimbegovic and L. Chorfi, (1999), « Viscoplasticity model at finite deformations with combined isotropic and kinematic hardening», Computers and Structures 77 (2000) 509-525.
- [J1] S.C. Jain et A. N. Bramley, (1968), «Speed and frictional effects in hot forging», Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers 1967 182: 783, DOI: 10.1243/PIME_PROC_1967_182_059_02.
- [J2] Q. Jin, (2013), «Grain evolution during hot forging», Advanced Manufacture Technology Canter, China Academy of Machinery Science & Technology, Beijing, China.
- [J3] G.R. Johnson et W.H. Cook, (1983), «A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain rates and high temperatures», In Seventh International Symposium on Ballistics, pages 541–547, The Hague, The Netherlands, April 19-21 1983 pages 541–547, The Hague, The Netherlands, April 19-21 1983.
- [J4] P-P. Jeunechamps, (2008), «Simulation numérique, à l'aide d'algorithmes thermomécaniques implicites, de matériaux endommageables pouvant subir de grandes vitesses de déformation. Application aux structures aéronautiques

- soumises à impact », Thèse de doctorat, Université de Liège, Faculté des Sciences Appliquées.
- [J5] G. Johnson and S. Beissel, (1996), «Normalized smoothing functions for SPH impact computations», International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 39, n°16, 1996, p. 2725-2741, Wiley Online Library.
 - [J6] G. Johnson, T. Holmquist, JR. C. Anderson et A. Nicholls, (2006), «Some mathematical aspects of the damage softening problem. », Journal de Physique IV France, vol. 6, 2006, p. 134-391.
 - [K1] Hyunkee Kim, Tetsuji Yagi, Masahito Yamanaka, (2000), «FE simulation as a must tool in cold/warm forging process and tool design», Journal of Materials Processing Technology 98 (2000) 143±149.
 - [K2] I. Kačmarčík, D. Movrin et A. Ivanišević, (2011), « One contribution to the friction investigation in bulk metal forming », Journal for Technology of Plasticity, Vol. 36 (2011), Number 1, DOI: 10.2478/v10211-011-0001-4.
 - [L1] Y. C. Lin, Lei-Ting Li, Yan-Xiang Fu, Yu-Qiang Jiang (2011), «Hot compressive deformation behavior of Al alloy under elevated temperature», Journal of Materials Science February 2012, Volume 47, Issue 3, pp 1306-1318.
 - [L2] J. L. Lacome, (2002), «Smooth Particle Hydrodynamics (SPH), A New Feature in LS-DYNA», Proceedings of the 7th International LS-DYNA Users Conference, 2002
 - [L3] P. Lestriez (2003), « Modélisation numérique du couplage thermo-mécanique-endommagement en transformations finies. Application à la mise en forme», Thèse de doctorat, Université de technologie de Troyes.
 - [L4] S. Li and W. K. Liu, (2002), «Meshfree and particle methods and their applications», Appl Mech Rev vol 55, no 1, January 2002, University of California, Northwestern University.

- [L5] G. R. Liu, M. B. Liu, (2005), «Smoothed particle hydrodynamics, a meshfree particle method», Livre, Springer.
- [L6] L. Langlois, R. Bigot, L. Morhain, P. Sécordel, (2007), «Caractérisation de lubrifiant par approche semi-industrielle pour le forgeage de précision»
- [L7] Lavoie M.A., Gakwaya A., Nejad Ensan M.(2010), «Variable-h and energy conserving SPH formulation with application in aerospace engineering», JOURNAL Mathematics in Engineering, Science and Aerospace, Vol 1, No 1 (2010), pp27-70.
- [L8] Y. Li, X. Li, X. Kong and X. Wu, (2013), «Evaluation of ductile fracture models in high velocity impact problems», Wuhan University of Technology, Wuhan, 430063, China, Conference article.
- [L9] Lu, J., Flavenot, J. F. and Lieurade, H. P. «Intégration de la notion des contraintes résiduelles dans les bureaux d'études», les contraintes résiduelles au bureau d'études. CETIM, Senlis, France, 1991, pp. 9–34.
- [L10] J. Limido et C. Espinosa, (2005), « Modélisation numérique de la coupe orthogonale en ugv», National conference proceedings.
- [L11] J. Limido, (2008), « Étude de l'effet de l'usinage grande vitesse sur la tenue en fatigue de pièces aéronautiques», thèse de doctorat, Université de Toulouse.
- [L12] F. Lefebvre, (2014), « Effet des contraintes résiduelles et des contraintes moyennes sur la tenue en fatigue, Techniques, d'analyses des contraintes résiduelles et difficultés associées. », Séminaire GT7, Commission Fatigue-SF2M, Centre technique des industries mécaniques.
- [L13] J. Lu, (1996), «Handbook of Measurement of Residual Stresses», Society for Experimental Mechanics, Inc.
- [L14] C. Loosveldt and D. Watrin, (2010), «Alternative Numerical Methods in Continuum Mechanics, Smoothed Particle Hydrodynamics», Université de Liège.

- [L15] W. K. Liu, S. Jun et Y. F. Zhang, (1995), «Reproducing kernel particle methods», International Journal for Numerical Methods in Fluids.
- [L16] L. Libersky, A. Petschek, (1991), «Smooth particle hydrodynamics with strength of materials. », *Advances in the Free- Lagrange Method Including Contributions on Adaptive Gridding and the Smooth Particle Hydrodynamics Method*, 1991, p. 248–257, Springer.
- [L17] L. Libersky, A. Petschek, T. Carney, J. Hipp, F. Allahdadi, (1993), « High strain Lagrangian hydrodynamics ». *Journal of Computational Physics*, volume 109, p.67–75, 1993.
- [L18] H. E. Lee, (1969), «Elastic plastic deformation at finite strain», ASME Journal of Applied Mechanics, 36 (1969), 1-6.
- [L19] J. Lemaitre, J.-L. Chaboche, A. Benallal et R. Desmorat, (2009), «Mécanique des matériaux solides», 3ème édition. Dunod, Paris.
- [M1] H. McQueen, S. Spigarelli, M. E. Kassner et E. Evangelista, (2011), «Hot deformation and processing of aluminum alloys», ISBN 9781574446784 - CAT# DK4130.
- [M2] H. W. Meyer, Jr, (2006), «A modified Zerilli-Armstrong constitutive model describing the strength and localizing behavior of Ti-6AL-4v», Dynamic Sciences, Inc. 1003 Old Philadelphia Road Ste 210 Aberdeen, MD 21001.
- [M3] J-F. Mariage, (2003), « Simulation numérique de l'endommagement ductile en formage de pièces massives », thèse de doctorat, Université de Technologie de Troyes.
- [M4] J. J. Monaghan, (1992), «Smoothed particle hydrodynamics», Monash University, Clayton, Victoria 3168, Australia.
- [M5] J. J. Monaghan, (1992), «Smoothed Particle Hydrodynamics», Annual Review of Astronomy and Astrophysics, volume 30, pages 543-574.

- [M6] J. J. Monaghan, (2000), « SPH without a tensile instability», *Journal of Computational Physics*, 159(2):290–311, 2000. ISSN 0021-9991.
- [M7] J. J. Monaghan, (2005), «Smoothed particle hydrodynamics», Monash University, Clayton, Victoria 3800, Australia.
- [M8] B. Maurel, (2008), «Modélisation par la méthode SPH de l'impact d'un réservoir rempli de fluide», Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, thèse de doctorat.
- [M9] M. Matei, (2011), «Développement d'outils intégrés pour la fabrication virtuelle de produits en aluminium et en acier par hydroformage de tubes pour l'industrie aéronautique», thèse de doctorat, Université Laval.
- [N1] K. Narendar, A. S. M. Rao, K. G. K. Rao and N. G. Krishna, (2013), «Temperature Dependence of Density and Thermal Expansion of Wrought Aluminum Alloys 7041, 7075 and 7095 by Gamma Ray Attenuation Method», *Journal of Modern Physics*, 4, 331-336.
- [N2] E. G. Nisbett, (2005), «Steel forgings: design, production, selection, testing and application», ASM international.
- [O1] G. Oger, (2006), «Aspects théoriques de la méthode SPH et applications à l'hydrodynamique à surface libre», these de doctorat, École Centrale de Nantes et Université de Nantes, 2006.
- [P1] Céline Pelissou (2005), « Discrétisation spatio-temporelle du problème thermique à deux champs. Application au procédé de forgeage à chaud », Thèse de Doctorat, l'École Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- [P2] F.Parvizian, T. Kayser, B. Klusemann, B. Svendsen, (2010), «Modelling and simulation of dynamic microstructure evolution of aluminium alloys during thermomechanically coupled extrusion process», *Int J Mater Form* (2010) Vol. 3 Suppl 1:363 – 366.

- [P3] C. Poizat, L. Campagne, L. Daridon, S. Ahzi, C. Husson and L. Merle, (2005), (1995), «Modeling and Simulation of Thin Sheet Blanking using damage and rupture criteria», International Journal of Forming Processes. Volume 8 (1) (2005) pp. 29-47.
- [P4] M. B. Prime, «The Contour Method: Capabilities, Limitations, and Recent Advances», Los Alamos National Laboratory.
- [P5] P. S. Prevéy, (1996), « Current applications of X-ray diffraction residual stress measurement». In 28th Annual Technical Meeting of International Metallographic Society. (Albuquerque, Jul. 23-24 1995), p. 103-110. Coll. « Developments in Materials Characterization Technologies ». Materials Park (OH): ASM International.
- [P6] P. Poupeau, (1981), «Traitement thermique des métaux et alliages», Techniques de l'Ingénieur, traité Matériaux métalliques M 1 105 – 1 M 1 105 1 – 1981.
- [R1] P. Randles and L. Libersky, (1996), «Smoothed particle hydrodynamics: some recent improvements and applications», Computer methods in applied mechanics and engineering, vol. 139, n°1-4, p.375-408, Elsevier.
- [R2] R. George (2009), « Complementarity of experimental and numerical methods for determining residual stress states ». Powder Diffraction, vol. 24, no suppl.S1, p. S3-S10.
- [R3] S. Rasouli Yazdi, D Retraint and J. Lu, (1998), «Study of through-thickness residual stress by numerical and experimental techniques», Journal of strain analysis vol 33 n°6.
- [R4] J. Reveles, (2007), «Development of a total lagrangian SPH code for the simulation of solids under dynamic loading», PhD thesis, Cranfield University.
- [R5] L. Rabemananjara, (2016), « Etude de l'influence de la vitesse de déformation sur la réponse à l'indentation des matériaux polymères », thèse de doctorat, Université Rennes 1.

- [S1] C. M. Sellars and Q. Zhu (2000) «Microstructural modelling of aluminium alloys during thermomechanical processing», *Materials Science and Engineering A280* (2000) 1–7
- [S2] A.-K. Sinha, (2002), «Defects and distortions in heat-treated parts», *ASM Handbook, 'Heat Treating'*, 4(1), 2002.
- [S3] M. Shirgaokar, G. Ngaile et G. Shen, (2005), «Process modeling in impression-die forging using finite-element analysis», 2005 ASM International. All Rights Reserved. *Cold and Hot Forging: Fundamentals and Applications (#05104G)*.
- [S4] A. Skrzat, (2012), «Application of coupled eulerien-lagrangian approach in metal forming simulations», *Mechanika z.* 84 (4/12).
- [S5] V. Savaria, (2014), « Contraintes résiduelles et leurs impacts sur l’amorçage de fissures en fatigue de flexion dans des engrenages aéronautiques durcis superficiellement par induction », Thèse de doctorat, École de technologie supérieure université du Québec.
- [S6] C. Shi, J. Lai et X. Chen, (2014), «Microstructural Evolution and Dynamic Softening Mechanisms of Al-Zn-Mg-Cu Alloy during Hot Compressive Deformation», *Materials* 2014, 7, 244-264; doi: 10.3390/ma7010244.
- [S7] J. C. Simo et T. J. R. Hughes, (1998), «Computational Inelasticity», Springer-Verlag, New- York, USA, 1998.
- [S8] J. Schmitt, P. Fabregue et B. Thomas, (1995), « Recristallisation Dynamique dans les aciers », *J. Phys. IV*, 1995, 05 (C3), pp.C3-153-C3-163. <10.1051/jp4:1995313>. <Jpa-00253679>.
- [S9] S. Saraç (2007), « Design and thermo-mechanical analysis of warm forging process and dies », Master thesis, Middle East Technical University.
- [S10] J. Salençon, (2005), «Mécanique des milieux continus, Tome 1-Concepts généraux», Éd. École Polytechnique Palaiseau, Ellipses, 2005.

- [S11] F. Sidoroff, (1982), «Incremental constitutive equation for large strain elastoplasticity», *International Journal of Engineering Science*, 20 (1982), 19-26.
- [S12] J. C. Simo, (1985), « On the computational significance of intermediate configuration and hyperelastic stress relations in finite deformation elastoplasticity», *Mech. Mater.* 4, 439-451, 1985.
- [S13] J. C. Simo, (1988), « A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and multiplicative decomposition: Part I. Continuum formulation; Part II. Computational aspects», *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 66, 199-219, 1988 and 68, 1-31, 1988.
- [S14] J. C. Simo, (1992), « Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory», *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* **99**, 61-112, 1992.
- [T1] J. D. C. Teixeira, (2005), « Étude expérimentale et modélisation des évolutions microstructurales au cours des traitements thermiques en post forgeage dans l'alliage de titane Ti17 », Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine.
- [T2] A. Timesli, (2013), «Simulation du soudage par friction et malaxage à l'aide de méthodes sans maillage», Thèse de doctorat, Université de Lorraine.
- [V1] B. Verlinden, J. Driver, I. Samajdar et R. D. Doherty, (2007), « Thermomechanical processing of metallic materials». ELSEVIER, Oxford, 2007.
- [V2] K. S. Vijay Sekar and M. Pradeep Kumar, (2011), « Finite Element Simulations of Ti6Al4V Titanium Alloy Machining to Assess Material Model Parameters of the Johnson-Cook Constitutive Equation», *J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng.*
- [V3] G. Z. Voyiadjis, R. K. Abu Al-Rub and A. N. Palazotto, (2003), « Thermodynamic framework for coupling of non-local viscoplasticity and non-local anisotropic viscodamage for dynamic localization problems using gradient theory», *International Journal of Plasticity* 20 (2004) 981–1038.

- [V4] R. Vignjevic, (2009), «Review of development of the smooth particle hydrodynamics (SPH) method», Predictive Modeling of Dynamic Processes 2009, pp 367-396, Cranfield University, UK.
- [V5] Y. Vidal., J. Bonet, A. Huerta, (2007), «Stabilized updated Lagrangian corrected SPH for explicit dynamic problems ». International journal for numerical methods in engineering, vol. 69, no 13, 2007, p. 2687–2710, Wiley Online Library.
- [W1] S. Wolf, (2007), « Méthode sans maillage », Laboratoire de mathématiques appliquées aux systèmes.
- [W2] P. J. Withers, M. Turski, L. Edwards, P. J. Bouchard et D. J. Buttle, (2008), « Recent advances in residual stress measurement ». International Journal of Pressure Vessels and Piping, vol. 85, no 3, p. 118-127.
- [Y1] Q. Yang, Z. Deng, Z. Zhang, Q. Liu, Z. Jia et G. Huang, (2016), «Effects of strain rate on flow stress behavior and dynamic recrystallization mechanism of Al-Zn-Mg-Cu aluminum alloy during hot deformation», Materials Science & Engineering A662 (2016) 204–213.
- [Z1] S-H. Zhang, H-Y. Zang, H-W. Song et M. Cheng, (2013), «FEM simulation of hot forging process to predict microstructure evolution», Institute of Metal Research, Chinese Academy of Sciences, Shenyang 110016, China.
- [Z2] Y. Zhang, J. C. Outeiro, and T. Mabrouki, (2015), « On the selection of Johnson-Cook constitutive model parameters for Ti-6Al-4V using three types of numerical models of orthogonal cutting », ScienceDirect, Procedia CIRP 31 (2015) 11, 15th CIRP Conference on Modelling of Machining Operations.
- [Z3] J. Zouhar and M. Piska, (2008), « Modelling the orthogonal machining process using cutting tools with different geometry», MM science journal.
- [Z4] F.J. Zerilli et R.W. Armstrong (1986), «Dislocation-mechanics-based constitutive relations for material dynamics calculations», Journal of Applied Physics 61, 1816 (1987).

Autres documentations et sites web

- [1] <http://www.forges-ca.com/solution-forge/avantages>
- [2] <http://www.mecainindustrie.com/techniques/63-technique-forge.html>
- [3] <http://www.ac-creteil.fr/lycees/94/ebranlycreteil/cours/techno/html/forge02.htm>
- [4] <http://www.gevelot-extrusion.com/spip.php?rubrique28&lang=fr>
- [5] <http://www.keytometals.com>
- [6] http://www.wheelabratorgroup.com/fr/sites/wheelabrator/content/industry/aerospace/aerospace_landing_gear.aspx
- [7] http://chamilo1.grenet.fr/ujf/courses/MEC53A5/document/Doc_Forge/Partie_6_Solveur.pdf
- [8] <http://books.google.ca/books?id=st0MJYGv7jYC&pg=PA84&lpg=PA84&dq=relaxation+contraintes+r%C3%A9siduelles+%2B+traitement+thermique&source=bl&ots=EeuIPSi8P&sig=rv4AW4vROoocobj39no2fTe8Yfo&hl=fr&sa=X&ei=fM7JUriQAejC2wXZnYCIaw&ved=0CD8Q6AEwAw#v=onepage&q=relaxation%20contraintes%20r%C3%A9siduelles%20%2B%20traitement%20thermique&f=false>
- [9] <http://www.traitementsetmatériaux.fr/Dossiers-redaction/Fiche/28/La-metallurgie-vue-par-Guy-Murry>
- [10] <https://www.fhwa.dot.gov/advancedresearch/pubs/13103/001.cfm> (The Exploratory Advanced Research Program Multiscale Materials Modeling Workshop Summary Report April 23–24, 2013)
- [11] <http://www.farinia.com/fr/forge/forge-a-froid/forge-a-froid-vs-forge-a-chaud-explications-avantages-et-inconvenients#Les%20inconv%C3%A9nients%20de%20la%20forge%20%C3%A0%20chaud>

Annexe 1 : VUMAT

Ce vumat est utilisable pour le modèle de Johnson-Cook et le modèle de Johnson-Cook modifié.

C User subroutine VUMAT Johnson-Cook/ Johnson-Cook modifié

subroutine vumat (

C Read only -

```
* nblock, ndir, nshr, nstatev, nfieldv, nprops, lanneal,  
* stepTime, totalTime, dt, cmname, coordMp, charLength,  
* props, density, strainInc, relSpinInc,  
* tempOld, stretchOld, defgradOld, fieldOld,  
* stressOld, stateOld, enerInternOld, enerInelasOld,  
* tempNew, stretchNew, defgradNew, fieldNew,
```

C Write only -

```
* stressNew, stateNew, enerInternNew, enerInelasNew )
```

C

include 'vaba_param.inc'

C

```
dimension coordMp(nblock,*), charLength(nblock), props(nprops),  
1 density(nblock), strainInc(nblock,ndir+nshr),  
2 relSpinInc(nblock,nshr), tempOld(nblock),  
3 stretchOld(nblock,ndir+nshr),  
4 defgradOld(nblock,ndir+nshr+nshr),  
5 fieldOld(nblock,nfieldv), stressOld(nblock,ndir+nshr),  
6 stateOld(nblock,nstatev), enerInternOld(nblock),  
7 enerInelasOld(nblock), tempNew(nblock),  
8 stretchNew(nblock,ndir+nshr),  
9 defgradNew(nblock,ndir+nshr+nshr),  
1 fieldNew(nblock,nfieldv),  
2 stressNew(nblock,ndir+nshr), stateNew(nblock,nstatev),  
3 enerInternNew(nblock), enerInelasNew(nblock)
```

C

character*80 cmname

parameter (zero = 0.d0, one = 1.d0, two = 2.d0,

```
* third = 1.d0 / 3.d0, half = 0.5d0, op5 = 1.5d0 )
```

C

C For plane strain, axisymmetric, and 3D cases using

C the J2 Mises Plasticity with linear hardening.

C The state variable is stored as:

C STATE(*,1) = equivalent plastic strain

C STATE(*,2) = plastic strain rate

C

C

C User needs to input

C props(1) Young's modulus

C props(2) Poisson's ratio

C

C

e=props(1)

xnu=props(2)

```

Va=props(3)
Vb=props(4)
Vn=props(5)
Vc=props(6)
Tm=props(7)
Tr=props(8)
vm=props(9)
Fracheat=props(10)
Speheat=props(11)
*   Temr1=props(12)
oneone=props(13)
*   Temr2=props(14)
three=props(15)
*   five=props(16)
ten=props(17)
*   ps=props(18)
*   psv=props(19)
alpha=props(20)
Tp=props(21)
Tc=props(22)
vuzero=props(23)
vuone=props(24)
sigavant=props(25)
sigapres=props(26)

twomu = e / ( one + xnu )
alamda = xnu * twomu / ( one - two * xnu )
thremu = op5 * twomu
*
if ( stepTime .eq. zero ) then
do k = 1, nblock
trace = strainInc(k,1) + strainInc(k,2) + strainInc(k,3)
stressNew(k,1) = stressOld(k,1)
*   + twomu * strainInc(k,1) + alamda * trace
stressNew(k,2) = stressOld(k,2)
*   + twomu * strainInc(k,2) + alamda * trace
stressNew(k,3) = stressOld(k,3)
*   + twomu * strainInc(k,3) + alamda * trace
stressNew(k,4)=stressOld(k,4) + twomu * strainInc(k,4)
if ( nshr .gt. 1 ) then
stressNew(k,5)=stressOld(k,5) + twomu * strainInc(k,5)
stressNew(k,6)=stressOld(k,6) + twomu * strainInc(k,6)
end if
end do
else
do k = 1, nblock
stateOld(k,5)=25

c calculate H(T) : contribution of recrystallization
c
if(stateOld(k,5)<Tc)then

```

```

vu=vuzero
H=1/(1-(1-(sigavant/sigapres))*vuzero)
else
vu=vuone
H=1/(1-(1-(sigavant/sigapres))*vuone)
end if

cccccccccccccccccccccccccccccccccccc
* Finding yield value

        if (stateOld(k,2).eq.zero) then
            yield=0.420
        else
            A=1+Vc*log(stateOld(k,2)/0.1)
            B=1-((stateOld(k,5)-25)/(641-25))*vm
            yield=(Va+Vb*stateOld(k,1)**Vn)*A*B*H
        end if

trace = strainInc(k,1) + strainInc(k,2) + strainInc(k,3)
s11 = stressOld(k,1) + twomu * strainInc(k,1) + alamda *trace
s22 = stressOld(k,2) + twomu * strainInc(k,2) + alamda *trace
s33 = stressOld(k,3) + twomu * strainInc(k,3) + alamda *trace
s12 = stressOld(k,4) + twomu * strainInc(k,4)
if ( nshr .gt. 1 ) then
    s13 = stressOld(k,5) + twomu * strainInc(k,5)
    s23 = stressOld(k,6) + twomu * strainInc(k,6)
end if

*
smean = third * ( s11 + s22 + s33 )
s11 = s11 - smean
s22 = s22 - smean
s33 = s33 - smean
if ( nshr .eq. 1 ) then
    vmises = sqrt( op5*(s11*s11+s22*s22+s33*s33+two*s12*s12) )
else
    vmises = sqrt( op5 * ( s11 * s11 + s22 * s22 + s33 * s33 +
*       two * s12 * s12 + two * s13 * s13 + two * s23 *s23 ) )
end if

*
        if(peeOld .eq.zero) then
            hard=thremu
        else
            hard=Vb*Vn*(stateOld(k,1)**(Vn-1))*
*       (1+Vc*log(stateOld(k,2)/0.1))*B
        end if

sigdif = vmises - yield
facyld = zero
if ( sigdif .gt. zero ) facyld = one

```

```

    deqps = facyld * sigdif /(thremu)
*
    deltemp=(Fracheat*yield*deqps)/(density(nblock)*Speheat*0.001)

* Update the state variable
    stateNew(k,1) = stateOld(k,1)+deqps
    stateNew(k,2) = deqps/dt
    stateNew(k,3) = yield
    stateNew(k,4) = deltemp

*
* Update the stress
    factor = yield / ( yield + thremu * deqps )
    stressNew(k,1) = s11 * factor !+ smean + e*alpha* deltemp
    stressNew(k,2) = s22 * factor !+ smean + e*alpha* deltemp
    stressNew(k,3) = s33 * factor !+ smean + e*alpha* deltemp
    stressNew(k,4) = s12 * factor
    if ( nshr .gt. 1 ) then
        stressNew(k,5) = s13 * factor
        stressNew(k,6) = s23 * factor
    end if

*
* Update the specific internal energy -
    if ( nshr .eq. 1 ) then
        stressPower = half * (
*           ( stressOld(k,1) + stressNew(k,1) ) * strainInc(k,1) +
*           ( stressOld(k,2) + stressNew(k,2) ) * strainInc(k,2) +
*           ( stressOld(k,3) + stressNew(k,3) ) * strainInc(k,3) )+
*           ( stressOld(k,4) + stressNew(k,4) ) * strainInc(k,4)
        else
            stressPower = half * (
*           ( stressOld(k,1) + stressNew(k,1) ) * strainInc(k,1) +
*           ( stressOld(k,2) + stressNew(k,2) ) * strainInc(k,2) +
*           ( stressOld(k,3) + stressNew(k,3) ) * strainInc(k,3) )+
*           ( stressOld(k,4) + stressNew(k,4) ) * strainInc(k,4)+
*           ( stressOld(k,5) + stressNew(k,5) ) * strainInc(k,5)+
*           ( stressOld(k,6) + stressNew(k,6) ) * strainInc(k,6)
        end if
        enerInternNew(k) = enerInternOld(k) + stressPower / density(k)

*
* Update the dissipated inelastic specific energy -
        plasticWorkInc = yield * deqps
        enerInelasNew(k) = enerInelasOld(k)
*         + plasticWorkInc / density(k)
    end do
end if

*
return
end

```

Annexe 2 : Étapes de modélisation d'un VUEL dans Abaqus [Documentation d'abaqus]

User subroutine interface

```
SUBROUTINE VUEL(nblock,rhs,amass,dtimeStable,svars,nsvars,  
1      energy,  
2      nnode,ndofel,props,nprops,jprops,njprops,  
3      coords,mcrd,u,du,v,a,  
4      jtype,jElem,  
5      time,period,dtimeCur,dtimePrev,kstep,kinc,  
6      lflags,  
7      dMassScaleFactor,  
8      predef,npredef,  
9      jdltyp, adlmag)
```

C

```
include 'vaba_param.inc'
```

C operational code keys

```
parameter ( jMassCalc      = 1,  
*      jIntForceAndDtStable = 2,  
*      jExternForce      = 3)
```

C flag indices

```
parameter (iProcedure = 1,  
*      iNlgeom      = 2,  
*      iOpCode      = 3,  
*      nFlags      = 3)
```

C energy array indices

```
parameter ( iElPd = 1,  
*          iElCd = 2,  
*          iElIe = 3,  
*          iElTs = 4,  
*          iElDd = 5,  
*          iElBv = 6,  
*          iElDe = 7,  
*          iElHe = 8,  
*          iElKe = 9,  
*          iElTh = 10,  
*          iElDmd = 11,  
*          iElDc = 12,  
*          nElEnergy = 12)
```

C predefined variables indices

```
parameter ( iPredValueNew = 1,  
*          iPredValueOld = 2,  
*          nPred          = 2)
```

C time indices

```
parameter (iStepTime = 1,  
*          iTotTime = 2,  
*          nTime    = 2)
```

```
dimension rhs(nblock,ndofel),amass(nblock,ndofel,ndofel),  
1      dtimeStable(nblock),  
2      svars(nblock,nsvars),energy(nblock,nElEnergy),
```

```

3      props(nprops),jprops(njprops),
4      jElem(nblock),time(nTime),lflags(nFlags),
5      coords(nblock,nnode,mcrd),
6      u(nblock,ndofel), du(nblock,ndofel),
7      v(nblock,ndofel), a(nblock, ndofel),
8      dMassScaleFactor(nblock),
9      predef(nblock,nnode,npredef,nPred),
*      adlmag(nblock)

      do kblock = 1,nblock
        user coding to define rhs, amass, dtimeStable, svars and energy
      end do

RETURN
END

```


Annexe 3: Integration of the constitutive laws [Simo]

Integration of the constitutive laws has been considered in several papers [i, ii, iii, iv, v]. Here, as an example we consider the algorithm that is used for implementation of the “*reqMatrixD()*” method in the Hyperplastic class. In this method, the general return mapping in principal axes algorithm with an implicit integration method is implemented. Our implementation is based on the multiplicative decomposition proposed by Simo [v, vi, vii] for large strain elastoplasticity.

Given a typical time step t_n and displacement increment Δu_{n+1} in a typical time interval $[t_n, t_{n+1}]$, we first assume plastic flow is frozen and evaluate a trial elastic state. Then the trial stress state is tested to see if it is inside or outside of the yield surfaces. If it is outside the elastic zone, the true stress is then found by a closest-point-projection of the trial stress onto the yield surfaces. The problem to be solved can be stated as follows:

consider a typical time sub-interval $[t_n, t_{n+1}]$, and a specific Gauss point $X \in \Omega$, (Ω is the domain of material). Assuming that X has the following history of deformation gradient, left Cauchy-Green tensor and strain like internal variables vector: $\{F_n, b_n^e, \xi_n\}$ at time t_n . We would like to compute: true stress state σ_{n+1} and history variables $\{F_{n+1}, b_{n+1}^e, \xi_{n+1}\}$ at time t_{n+1} for a given a prescribed incremental displacement u_{n+1} .

Algorithm:

A. Kinematical Calculation:

- Compute the relative deformation gradient:

$$F_u^{n+1} = I + \nabla u_{n+1}$$

I is an identity matrix.

- Evaluate total deformation gradient and its determinant:

$$F_{n+1} = F_u^{n+1} F_n$$

$$J_{n+1} = \det F_{n+1}$$

B) Apply the predictor/corrector algorithm for the multiplicative decomposition.

1. elastic trial state (first freeze plastic flow and compute trial elastic response)

1.1 compute the trial left Cauchy-Green tensor

$$b_{n+1}^{e \text{ trial}} = F_{n+1} b_n^e F_{n+1}^T$$

1.2 perform its spectral decomposition of $b_{n+1}^{e \text{ trial}}$ by solving an eigen value problem:

- compute invariants I_1, I_2, I_3 :

$$I_1 = \text{tr}[b_{n+1}^{e \text{ trial}}]$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - \text{tr}[b_{n+1}^{e \text{ trial}}]^2)$$

$$I_3 = \det[b_{n+1}^{e \text{ trial}}]$$

- form the characteristic equation:

$$-(\lambda_A^e)^6 + I_1(\lambda_A^e)^4 - I_2(\lambda_A^e)^2 + I_3 = 0$$

- find principal values λ_A^e , $A = 1, \dots, 3$

- compute rank-one principal directions basis matrices [viii]:

$$n^{(A)} \otimes n^{(A)} = m^{(A)} = \frac{(b_{n+1}^{e \text{ trial}})^2 - (I_1 - (\lambda_A^e)^2) b_{n+1}^{e \text{ trial}} + I_3 (\lambda_A^e)^{-2} \tilde{g}}{2(\lambda_A^e)^4 - I_1 (\lambda_A^e)^2 + I_3 (\lambda_A^e)^{-2}},$$

for $\lambda_1^e \neq \lambda_2^e \neq \lambda_3^e$

$$n^{(3)} \otimes n^{(3)} = m^{(3)} = \frac{b_{n+1}^{e \text{ trial}} - (\lambda_1^e)^2 \tilde{g}}{(\lambda_3^e)^2 - (\lambda_1^e)^2}; \quad m^{(1)} = \tilde{g} - m^{(3)}$$

for $\lambda_1^e = \lambda_2^e \neq \lambda_3^e$

$$n^{(1)} \otimes n^{(1)} = m^{(1)} = \lambda^e \tilde{g} \quad \text{for } \lambda_1^e = \lambda_2^e = \lambda_3^e = \lambda^e$$

here $\tilde{g}$ is the metric tensor.

- hence spectral decomposition $b_{n+1}^{e \text{ trial}}$ becomes:

$$b_{n+1}^{e \text{ trial}} = \begin{cases} \sum_{A=1}^3 (\lambda_A^e)^2 m^{(A)}, \\ (\lambda_1^e)^2 \tilde{g} + ((\lambda_3^e)^2 - (\lambda_1^e)^2) m^{(3)} \\ (\lambda_1^e)^2 \tilde{g} \end{cases}$$

$$\det[b_{n+1}^{e \text{ trial}}] = (\lambda_1^e)^2 (\lambda_2^e)^2 (\lambda_3^e)^2$$

1.3 evaluate the trial logarithmic principal stretches:

$$\varepsilon_{A,n+1}^{e \text{ trial}} = \ln \lambda_A^e,$$

$$\ln J^e = \text{tr} [\varepsilon_A^e],$$

$$J^e = (\lambda_1^e)(\lambda_2^e)(\lambda_3^e)$$

1.4 compute elastic principal trial Kirchhoff stresses:

$$\sigma = 2 \frac{\partial \psi}{\partial b^e} b^e \Rightarrow \{\tau_{n+1}^{e \text{ trial}}\} = [a] \{\varepsilon_{n+1}^{e \text{ trial}}\}$$

where $[a] = \kappa \vec{1} \otimes \vec{1} + 2\mu(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \vec{1} \otimes \vec{1})$, κ is the bulk modulus and μ is the shear modulus. Due to isotropy, the principal directions of the Kirchhoff stress τ and of the elastic left Cauchy-Green tensor b^e coincide. Hence, in term of the principal Kirchhoff stresses, we can write:

$$\tau = \sum_{A=1}^3 \beta_A m^A$$

where β_A , $A=1,2,3$ are principal value of Kirchhoff stress tensor, with deviatoric part:

$$\bar{\beta}_{n+1}^{\text{trial}} = 2\mu \bar{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}}; \quad \bar{\varepsilon}^e = \text{dev}[\varepsilon^e] = \varepsilon^e - \frac{1}{3} \text{tr}[\varepsilon^e]$$

and pressure:

$$p_{n+1}^{\text{trial}} = J_{n+1} \frac{dU(J_{n+1})}{dJ}$$

$U(\lambda_A^e, \xi)$, $A = 1, \dots, 3$, is volumetric free energy function.

1.5 evaluate the trial yield function;

$$\phi_{n+1}^{\text{trial}} = \phi(\tau_{n+1}^{\text{trial}}, q_{n+1}^{\text{trial}})$$

in case of Von Mises:

$$\phi(\tau, q)_{n+1}^{\text{trial}} = \|\text{dev}[\tau_{n+1}^{\text{trial}}]\| - \sqrt{\frac{2}{3}} [\sigma_y + h(\xi_{n+1}^{\text{trial}})]$$

where σ_y is the yield stress, q is stress-like internal variable and $h(\cdot)$ is an isotropic hardening function.

1.6 Testing:

- if trial yield function ≤ 0 then we have an **elastic response**:

.perform a trivial updating: $(\cdot)_{n+1} = (\cdot)^{\text{trial}}$

. exit.

- else if trial yield function > 0 , we have a **plastic response**

. perform a one step return mapping i.e.

. continue to step 2

2. Plastic Correction Phase (perform a plastic corrector). Perform the return mapping algorithm in principal axes to evaluate the elastic stretches ε_{n+1} , total stresses σ_{n+1} and internal variables ξ_{n+1} in a way that is consistent with the plasticity constitutive laws:

2.1 evaluate the consistency parameter $\Delta\gamma_{n+1}$ at time t_{n+1} using Euler-backward method:

- evaluate the plastic flow direction from the trial state:

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_{n+1}^{\text{trial}} = \frac{\beta_{n+1}^{\text{trial}}}{\|\beta_{n+1}^{\text{trial}}\|}$$

- use updating formula for : stresses and equivalent plastic strain(for isotropic hardening)

$$\begin{aligned}\tau_{n+1}^A &= \beta_{n+1} = \beta_{n+1}^{\text{trial}} - 2\mu\Delta\gamma_{n+1}\mathbf{v}_{n+1} \\ \xi_{n+1} &= \xi_{n+1}^{\text{trial}} + \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\gamma_{n+1}\end{aligned}$$

- use expression of current value of the yield surface at t_{n+1} and find a combined non linear scalar equation in $\Delta\lambda_{n+1}$ which becomes in case of isotropic hardening:

$$\begin{aligned}\phi_{n+1} &= \phi_{n+1}^{\text{tr}} - 2\mu\Delta\gamma_{n+1} - \sqrt{\frac{2}{3}}[h'(\xi_n + \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\gamma_{n+1}) - h'(\xi_n)] = 0; \\ h(\xi) &= H\xi + [\sigma_y^\infty - \sigma_y](1 - \exp[\delta\xi])\end{aligned}$$

solve it using a local Newton-Raphson scheme and find $\Delta\lambda_{n+1}$. Here, H is the kinematical hardening coefficient (=0 here) and σ_y^∞ and σ_y are the yield limit at infinity and the current yield limit of the material.

2.2 Once $\Delta\lambda_{n+1}$ is found , then perform updating of strains and stresses at t_{n+1} :

- first compute elastic principal stretches:

$$\varepsilon_{n+1}^e = \varepsilon_{n+1}^{\text{trial}} - \Delta\lambda_{n+1}\mathbf{v}_{n+1}^{\text{trial}}$$

- update internal plastic variables:

$$\xi_{n+1} = \xi_{n+1}^{\text{trial}} - \Delta\lambda_{n+1}\partial_q\phi_{n+1}$$

- compute the principal deviatoric Kirchhof stresses:

$$\bar{\beta}_{n+1} = \beta_{n+1}^{\text{tr}} - 2\mu\Delta\gamma_{n+1}\mathbf{v}_{n+1}$$

- recover the total Kirchhof stress tensor from the spectral decomposition:

$$\text{dev}[\tau] = \bar{\tau}_{n+1} = \begin{cases} \sum_{A=1}^3 \beta_{n+1}^{(A)} \mathbf{m}_{n+1}^{(A)} \\ \beta_{n+1}^{(1)} \tilde{\mathbf{g}} + (\beta_{n+1}^{(3)} - \beta_{n+1}^{(1)}) \mathbf{m}_{n+1}^{(3)} \\ \beta_{n+1}^{(1)} \tilde{\mathbf{g}} \end{cases}$$

Add pressure term and deviatoric part to obtain:

$$\tau_{n+1} = \text{dev}[\tau_{n+1}] + J_{n+1}\mathbf{p}_{n+1}$$

2.3 Update the intermediate configuration:

- compute the updated left Cauchy-Green tensor

$$\mathbf{b}_{n+1}^e = \begin{cases} \sum_{A=1}^3 (\exp \varepsilon_{A,n+1}^{(e)})^2 \mathbf{m}_{n+1}^{(A)} \\ (\exp \varepsilon_{1,n+1}^e)^2 \tilde{\mathbf{g}} + [(\exp \varepsilon_{3,n+1}^e)^2 - (\exp \varepsilon_{1,n+1}^e)^2] \mathbf{m}_{n+1}^{(3)} \\ (\exp \varepsilon_{1,n+1}^e)^2 \tilde{\mathbf{g}} \end{cases}$$

using the principal basis direction and updated logarithmic stretches

- update the right Cauchy-Green plastic deformation tensor $\mathbf{C}^p$ on the intermediate configuration:

$$\mathbf{C}_{n+1}^p{}^{-1} = \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{b}_{n+1}^e \mathbf{F}_{n+1}^{-1}$$

3. Compute the consistent algorithmic tangent moduli:

3.1 Ignoring the thermal effect, the assumed decoupled volumetric/isochoric form of the free energy can be written as:

$$\Psi = \Psi_{\text{vol}} + \Psi_{\text{isoch}}$$

$$\Psi_{\text{isoch}}(\bar{\mathbf{b}}^e) = \frac{1}{2} \mu [J^{e-\frac{2}{3}} \text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^e] - 3];$$

$$\Psi_{\text{vol}}(J^e) = U(J^e) = K \left[\frac{1}{2} ((J^e)^2 - 1) - \ln J^e \right]$$

3.2 compute the spatial elasticity tensor:

$$\mathbf{c}^e = \mathbf{c}_{\text{vol}}^e + \mathbf{c}_{\text{dev}}^e$$

$$\mathbf{c}_{\text{vol}}^e = (\mathbf{J}^e \mathbf{U}')' \mathbf{J}^e \bar{\mathbf{1}} \otimes \bar{\mathbf{1}} - 2 \mathbf{J}^e \mathbf{I}$$

$$\mathbf{c}_{\text{dev}}^e = 2\mu \left[\mathbf{I} - \frac{1}{3} \bar{\mathbf{1}} \otimes \bar{\mathbf{1}} \right] - \frac{2}{3} \|s\| [\bar{\mathbf{n}} \otimes \bar{\mathbf{1}} + \bar{\mathbf{1}} \otimes \bar{\mathbf{n}}]$$

$$\text{where: } s = \mu \text{dev}[\bar{\mathbf{b}}^e]; \quad \bar{\mathbf{n}} = \frac{s}{\|s\|}; \quad \bar{\mu} = \mu \frac{1}{3} \text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^e]$$

then the elastoplastic part is given by:

$$\mathbf{c}^{\text{ep}} = 2 \partial_g \text{dev}[\tau_{n+1}]|_{g=1}$$

$$\mathbf{c}^{\text{ep}} = \mathbf{c}_{\text{dev}}^{\text{e trial}} + \mathbf{c}_{\text{dev}}^p$$

$$\text{where: } \mathbf{c}_{\text{dev}}^{\text{e trial}} = 2 \bar{\mu} \left[\mathbf{I} - \frac{1}{3} \bar{\mathbf{1}} \otimes \bar{\mathbf{1}} \right] - \frac{2}{3} \|\text{dev}[\tau^{\text{tr}}]\| (\bar{\mathbf{1}} \otimes \bar{\mathbf{n}} + \bar{\mathbf{n}} \otimes \bar{\mathbf{1}})$$

$$c_{dev}^p = -\alpha^p \{ \beta_1 c^{e tr} + 2\bar{\mu} \beta_3 \tilde{n} \otimes \tilde{n} + 2\bar{\mu} \beta_4 \tilde{n} \otimes dev[\tilde{n}^2] \}$$

where α^p is a plastic loading flag :

$$\alpha^p = 1 \text{ for } \varphi^{trial} = > 0;$$

$$\alpha^p = 0 \text{ for } \varphi^{trial} < 0$$

the various coefficients β_i , $i=0,1,2,3,4$ are defined as:

$$\beta_0 = 1 + \frac{1}{2\bar{\mu}} h''(\xi_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma);$$

$$\beta_1 = \frac{2\bar{\mu}\Delta\gamma}{\|dev[\tau^tr]\|};$$

$$\beta_2 = [1 - \frac{1}{\beta_0}] \frac{2}{3} \|dev[\tau^tr]\| \frac{\Delta\gamma}{\bar{\mu}};$$

$$\beta_3 = \frac{1}{\beta_0} - \beta_1 + \beta_2;$$

$$\beta_4 = (\frac{1}{\beta_0} - \beta_1) \frac{\|dev[\tau^tr]\|}{\bar{\mu}}$$

4. Transfer from Kirchhoff stress to true Cauchy stresses:

$$\sigma_{n+1} = \tau_{n+1} / J_{n+1}$$

$$c_{c}^{ep} = c^{ep}_{n+1} / J_{n+1}$$

End of algorithm.

-
- [i] Nikishkov, G. P., and Atluri, S.N., "Implementation of a Generalized Midpoint Algorithm for Integration of Elasto-Plastic Constitutive Relations for Von Mises' Hardening Material," Computers and Structures, Vol. 49(6), pps. 1037-1044, 1993.
 - [ii] Ortiz M. and Simo J. C., "An analysis of a new class of integration algorithms for constitutive relations", Int. J. Meth. Engng 23, 353-366, 1986.
 - [iii] Simo J.C. and Govindjee S., "Non-linear B-stability and symmetry preserving return mapping algorithms for plasticity and viscoplasticity", Int. J. Numer. Meth. Engng 31, 151-176, 1991.
 - [iv] Gharzeddine F., A. Ibrahimbegovic, L. Chorfi & A. Gakwaya, "Formulation des théories de grandes déformations dans les axes principaux et leur implantation numérique", 4ème Colloque National en Calcul des Structures, Giens 1999.
 - [v] Simo J.C. "Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory", Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg. **99**, 61-112, 1992.

-
- [vi] Simo J. C. "On the computational significance of intermediate configuration and hyperelastic stress relations in finite deformation elastoplasticity", *Mech. Mater.* 4, 439-451, 1985.
- [vii] Simo J. C. "A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and multiplicative decomposition: Part I. Continuum formulation; Part II. Computational aspects", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 66, 199-219, 1988 and 68, 1-31, 1988.