Théorème de Paley-Wiener suivant le dual unitaire d'un groupe compact

Thèse en cotutelle
Doctorat en mathématiques

Ettien Yves-Fernand N'da

Université Laval
Québec, Canada
Philosophiæ doctor (Ph. D.)

et

Univ.Félix-Houphouët-Boigny
Abidjan,Côte d'ivoire

Théorème de Paley-Wiener suivant le dual unitaire d'un groupe compact

Thèse en cotutelle
Doctorat en Mathématiques

Ettien Yves-Fernand N'DA

Sous la direction de:

Javad Mashreghi, directeur de recherche
Kinvi Kangni, directeur de cotutelle

Résumé

Le théorème de Paley-Wiener donne une caractérisation des fonctions qui sont transformées de Fourier de certaines classes de fonctions différentiables à support compact en liant les propriétés de décroissance à l'infini de ces fonctions ou distributions à l'analyticité de leur transformée de Fourier.

Le théorème est déjà établi dans le cas classique : Le cas réel avec la transformée de Fourier holomorphe dans $L^2(\mathbb{R})$, le cas des fonctions à support compact sur $\mathbb{R}^n$ selon la formulation de Hormander. Une extension du théorème aux fonctions sphériques sur les groupes de Lie semi-simples existe également et est dénommée théorème de Gangolli. Nous en proposerons une autre formulation dans notre travail.

Soient G un groupe localement compact unimodulaire, K un sous-groupe compact de G et δ un élément du dual unitaire $\hat{K}$ de K. La présente thèse de doctorat vise à donner une extension du théorème de Bochner et du théorème de Paley-Wiener suivant une classe δ de représentations unitaires irréductibles de K, sur les groupes de Lie semi-simples mais aussi sur les groupes de Lie réductifs à séries discrètes non vides après avoir introduit la notion d'intégrale δ-orbitale. Si δ est de dimension 1, on retrouve le théorème de Paley-Wiener classique.

Abstract

Paley Wiener theorem characterizes the class of functions which are Fourier transforms of $\mathbb{C}^\infty$ functions of compact support on $\mathbb{R}^n$ by relating decay properties of those functions or distributions at infinity with analyticity of their Fourier transform. The theorem is already proved in classical case : the real case with holomorphic Fourier transform on $L^2(\mathbb{R})$, the case of functions with compact support on $\mathbb{R}^n$ from Hörmander and the spherical transform on semi simple Lie groups with Gangolli theorem.

Let G be a locally compact unimodular group, K a compact subgroup of G, and δ an element of unitary dual $\hat{K}$ of K. In this work, we'll give an extension of Bochner theorem and Paley-Wiener theorem with respect to δ, a class of unitary irreducible representations of K, where G is either a semi-simple Lie group or a reductive Lie group with non-empty discrete series after introducing a notion of δ-orbital integral. If δ is trivial and one dimensional, we obtain the classical Paley-Wiener theorem.

Table des matières

Liste des figures

Je dédie cette thèse à ma defunte
mère, source inépuisable
d'inspiration et de progression

The only way to learn
mathematics is to do
mathematics.

Paul R. Halmos

Remerciements

Je souhaite remercier en premier lieu mon directeur de thèse, le Professeur Javad Mashreghi, pour l'énorme opportunité offerte en m'accueillant au sein de son équipe à l'université Laval. Je lui suis également reconnaissant pour le précieux temps qu'il m'a accordé, ses qualités pédagogiques et scientifiques, ses critiques, sa franchise et sa sympathie. J'ai énormément appris à ses côtés et je lui adresse ma gratitude pour tout cela. Je tiens à lui exprimer toute ma reconnaissance aussi pour pour les financements et bourses de recherche reçus durant ces dernières années de thèse.

J'adresse de chaleureux remerciements à mon co-directeur de thèse, le Professeur Kangni Kinvi, professeur titulaire à l'université Felix Houphouet Boigny, pour son attention de tout instant sur mes travaux, pour ses conseils avisés en mathématiques et en dehors et son écoute qui ont été prépondérants pour la bonne réussite de cette thèse. Son énergie et sa confiance ont été des éléments moteurs pour moi. J'ai pris un grand plaisir à travailler avec lui. Je le remercie profondément d'avoir été mon mentor tout au long de ces quatre années et de ma maitrise.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les professeurs du département de mathématiques et de statistique de l'université Laval, qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions. Vous avez pour certains accepté de me rencontrer et répondre à mes questions et préoccupations mathématiques, administratives et bien d'autres, vous avez mon entière gratitude.

Je remercie mes très chers parents, mon Père, mes soeurs Andy, Grace et mon aîné Ange qui m'ont toujours apporté leur soutien. À ma mère décédée qui a tout sacrifié pour ses enfants n'épargnant ni santé ni efforts. Vous m'avez donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. Je suis redevable d'une éducation dont je suis fier. Je remercie Mme Kangni pour son encouragement, son soutien materiel, et ses conseils qui m'ont aidé à m'installer et m'adapter en tant que nouvel immigrant au Canada.

Je remercie très spécialement Minha Stena Longa pour son soutien. Je tiens à remercier aussi ces passionnés de Sciences, Kraidi Yannick, Pierre Olivier Parisé et Thierry Kouontchou Tchemb pour leur amitié, leur soutien inconditionnel et leurs encouragements.

Enfin, je remercie le programme de bourses d'excellences ISM pour leur soutien financier

Introduction

Soient G un groupe localement compact unimodulaire, K un sous-groupe compact de G, $\hat{K}$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles de K. Soit ϕ une fonction continue sur G, biinvariante par K, non identiquement nulle. La fonction ϕ est sphérique si et seulement si

$$\int_K \phi(xky)d\mu(k) = \phi(x)\phi(y). \tag{1}$$

Lorsque $G = \mathbb{R}$, les seuls sous-groupes de $\mathbb{R}$ muni de l'addition sont de la forme $a\mathbb{Z}$. Si de plus le sous-groupe est compact sur $\mathbb{R}$, il sera égal à $\{0\}$. L'équation (1) ci-dessus devient donc

$$\phi(x+y) = \phi(x)\phi(y). \tag{2}$$

Ce qui n'est rien d'autre que la relation fonctionnelle caractérisant la fonction exponentielle. Par conséquent, lorsque $G = \mathbb{R}$, les fonctions sphériques s'identifient aux fonctions exponentielles. La notion de fonction sphérique vient donc "généraliser" la notion de fonction exponentielle. Ainsi, on peut dire, par déduction que la théorie des fonctions sphériques généralise celle des transformées de Fourier sur $\mathbb{R}$.

Or nous le savons, le théorème de Paley-Wiener, existant dans le cas réel et avec les distributions, donne une caractérisation des fonctions qui sont transformées de Fourier de certaines classes de fonctions différentiables à support compact. Au vu de ce qui précède, il devient naturel de chercher à généraliser ce théorème aux fonctions sphériques. C'est ce qu'ont fait Helgason et Gangolli en 1970 en définissant tout d'abord une nouvelle transformée de Fourier appelée transformée de Fourier sphérique. La généralisation du théorème de Paley-Wiener selon Gangolli, a été par la suite, établie sur les groupes de Lie semi-simples pour des fonctions prises dans une certaine algèbre commutative (l'algèbre des fonctions biinvariantes par K). Le but de notre travail est d'étendre ce résultat cette fois-ci à des algèbres non commutatives. Sur la base de résultats obtenus en 1996, nous définirons, pour une classe δ de représentations irréductibles, un théorème de Paley-Wiener pour les transformées de Fourier sphériques de type δ sur des algèbres non commutatives.

À l'instar des précédentes démarches, nous commencerons, nous aussi, par généraliser sur cette classe de fonctions, une nouvelle transformée de Fourier.

Soit $S_\delta^m(G)$ l'ensemble des fonctions sphériques de type δ sur G de hauteur m. Ainsi, si ϕ est une fonction de $S_\delta^m(G)$, il existe une représentation $u_\delta^\phi \in X_m(K_\delta^\#(G))$ telle que

$$u_\delta^\phi(f) = \int_G f(x)\phi(x)d\mu(x),$$

et réciproquement. Ce qui permet d'identifier les espaces $S_\delta^m(G)$ et $X_m(K_\delta^\#(G))$ et ensuite définir la transformation de Fourier sphérique de type δ suivant le diagramme ci-après.

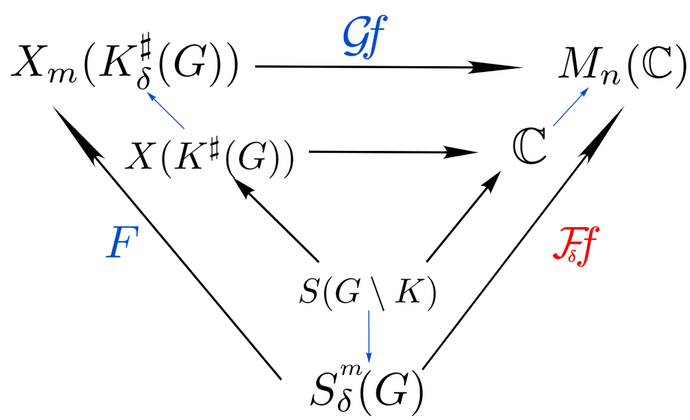

Figure 0.1 – Transformée de Fourier sphérique de type δ généralisant la transformée de Fourier sphérique.

Si δ est une classe de représentations triviales de dimension 1 de K, tout élément de $K_\delta^\#(G)$ est biinvariante par K. Ainsi l'algèbre $K_\delta^\#(G)$ s'identifie à $K^\#(G)$ (l'algèbre des fonctions biinvariantes par K) et est par suite commutative. Les représentations unitaires irréductibles de $K_\delta^\#(G)$ de dimension 1, s'identifient donc aux caractères de $K^\#(G)$ et on retrouve la définition de la transformation de Fourier sphérique usuelle.

Dans la suite de notre travail, nous proposerons, en plus de ce qui précède, une autre formulation du théorème de Paley-Wiener pour les fonctions sphériques. Nous présenterons également une généralisation du théorème de Bochner cette fois ci aux fonctions sphériques de type δ. Nous aborderons aussi une application au groupe de Poincaré, notamment en physique des particules caractérisées par leurs masses et leurs spins (moments cinétiques). Pour terminer, nous établirons, une extension du théorème de Paley-Wiener aux groupes de Lie réductifs.

Chapitre 1

Fonctions sphériques et fonctions sphériques de type delta

Dans cette section, nous aborderons tout d'abord les généralités et définitions qui seront utiliséees tout le long de notre travail. Par la suite, nous aborderons dans le détail la notion de fonctions sphériques.

1.1 Généralités

Définition 1.1.1. *Soit G un groupe localement compact. On appelle mesure de Haar à gauche (resp. à droite) sur G, toute mesure positive non nulle sur G invariante à gauche (resp. à droite). L'existence d'une mesure de Haar est assurée par le théorème suivant.*

Théorème 1.1.2. *Sur tout groupe localement compact G, il existe une mesure de Haar à gauche (resp à droite) G et toute autre mesure de Haar à gauche (resp à droite) sur G est de la forme $C\mu$ où C est un nombre réel strictement positif.*

Démonstration. Voir (2) N. Bourbaki. □

Proposition 1.1.3. *Soient G un groupe localement compact et μ une mesure de Haar à gauche sur G. Pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(G)$ (l'espace des fonctions complexes continues de support compact) et pour tout $s \in G$, la mesure ν définie par :*

$$\nu(f) = \mu(f_{s^{-1}}),$$

est une mesure positive invariante à gauche. Il existe donc un nombre positif unique $\Delta_G(s)$ tel que $\nu(f) = \Delta_G(s)\mu(f)$ c'est-à-dire que

$$\int_G f(xs^{-1})d\mu(x) = \Delta_G(s) \int_G f(x)d\mu(x).$$

Définition 1.1.4. *La fonction $s \to \Delta_G(s)$ de G dans $\mathbb{R}^+$ est appelée fonction module sur G. Le groupe G est dit unimodulaire si $\Delta_G(s) = 1$ pour tout $s \in G$.*

Remarque 1.1.5. *Si G est unimodulaire, toute mesure invariante à gauche sur G est aussi invariante à droite, et on parle simplement de mesure de Haar sur G.*

Considérons G un groupe localement compact, H un espace de Hilbert sur un corps $\mathbb{K}$. ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Définition 1.1.6. *On appelle représentation continue de G dans H, un homomorphisme $\pi : x \longmapsto \pi(x)$ de G dans le groupe $Aut(H)$ des opérateurs continus inversibles de H tel que l'application $x \longmapsto \pi(x)v$ de G soit continue pour tout $v \in H$. La représentation π est dite unitaire si $\forall x \in G$, π_x est unitaire.*

L'espace H est appelé la réalisation de π. La dimension de H est appelé le degré de la représentation π.

Définition 1.1.7. *Une représentation T d'un groupe G dans H est dite algebriquement irréductible si elle n'admet pas de sous-ensembles propres invariants.*

Définition 1.1.8. *Une représentation T de G dans un espace de Hilbert H est somme directe de représentations T_i de G dans H_i si les H_i sont des sous-espaces invariants de H tels que $H = \sum \oplus H_i$ et que chaque T_i est une sous-représentation de T. On la note $T = \sum_i \oplus T_i$.*

Paires de Guelfand

Soient G un groupe localement compact, μ une mesure de Haar invariante à gauche sur G et K un sous-groupe compact de G.
Notons $\mathcal{K}(G)$ l'espace vectoriel des fonctions complexes continues à support compact, et $K^{\#}(G)$ l'espace des fonctions de $\mathcal{K}(G)$ qui sont biinvariantes par K c'est à dire

$$\forall\ k, k^{'} \in K,\ f(kxk^{'}) = f(x).$$

La convolution de deux fonctions de $\mathcal{K}(G)$ est définie par

$$(f * g)(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)d\mu(y).$$

Pour tout $x \in G$, on pose $f^{\natural}(x) = \Delta(x^{-1})\overline{f(x^{-1})}$.$f^{\natural}$ définit une involution sur $\mathcal{K}(G)$. L'espace $\mathcal{K}(G)$ muni de la multiplication définie par le produit de convolution est une *-algèbre et $K^{\#}(G)$ en est une sous-*-algèbre.
Soit μ_K la mesure de Haar normalisée de K. Introduisons l'opérateur suivant

$$f^{*}(x) = \int\int_{K\times K} f(kxk^{'})d\mu_K(k)d\mu_K(k^{'}).$$

Proposition 1.1.9. *$f \to f^*$ est un projecteur de $\mathcal{K}(G)$ sur $K^{\#}(G)$.*

Démonstration. Soient k_1, $k_2 \in K$ et $f \in \mathcal{K}(G)$. On a

$$f^*(k_1xk_2) = \int\int_{K\times K} f(kk_1xk_2k^{'})d\mu_K(k)d\mu_K(k^{'}).$$

On pose $h = kk_1$ et $h^{'} = k_2k^{'}$. On obtient

$$\begin{aligned} f^*(k_1xk_2) &= \int\int_{K\times K} f(hxh^{'})d\mu_K(hk_1^{-1})d\mu_K(k_2^{-1}h^{'}) \\ &= \int\int_{K\times K} f(hxh^{'})d\mu_K(h)\triangle(k_1^{-1})d\mu_K(h^{'}) \\ &= \int\int_{K\times K} f(hxh^{'})d\mu_K(h)d\mu_K(h^{'}). \end{aligned}$$

Ainsi, $f^*(k_1xk_2) = f^*(x)$ donc $f^* \in K^{\#}(G)$. □

Définition 1.1.10. *On dit que la paire (G, K) est une paire de Guelfand si l'algèbre de convolution $K^{\#}(G)$ est commutative.*

Proposition 1.1.11. *Si (G, K) est une paire de Guelfand, alors G est unimodulaire.*

Démonstration. Pour tout $f \in \mathcal{K}(G)$, On a

$$\int_G f(x)d\mu(x) = \int_G f(x^{-1}) \triangle (x^{-1})d\mu(x). \tag{1.1}$$

Le groupe G est unimodulaire si et seulement si

$$\int_G f(x)d\mu(x) = \int_G f(x^{-1})d\mu(x).$$

Il suffit donc de démontrer que $\int_G f(x)d\mu(x) = \int_G f(x^{-1})d\mu(x)$.
Ainsi, soit (G, K) une paire de Guelfand. Soit g une fonction de $K^{\#}(G)$ telle que $g(x) = 1$ sur le compact $(Suppf) \cup (Suppf)^{-1}$ où $(Suppf)^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in Suppf\}$. On a

$$\begin{aligned} (f * g)(e) &= \int_G f(x)g(x^{-1})d\mu(x) \\ &= \int_{(suppf)} f(x)g(x^{-1})d\mu(x) \\ &= \int_G f(x)d\mu(x). \end{aligned}$$

Et

$$
\begin{aligned}
(g*f)(e) &= \int_G g(x)f(x^{-1})d\mu(x) \\
&= \int_{(suppf)^{-1}} g(x)f(x^{-1})d\mu(x) \\
&= \int_{(Suppf)^{-1}} f(x^{-1})d\mu(x) \\
&= \int_G f(x^{-1})d\mu(x).
\end{aligned}
$$

Comme (G,K) est une paire de Guelfand, alors

$$(f*g)(e) = (g*f)(e).$$

Ainsi, $\int_G f(x)d\mu(x) = \int_G f(x^{-1})d\mu(x)$; cela entraine que $\triangle(x^{-1}) = 1$.
D'où G est unimodulaire. □

Exemple
Le premier exemple d'une paire de Guelfand est celui où G est un groupe commutatif et où K est réduit à l'élément neutre, $K = \{e\}$.

Introduisons l'analogue des fonctions exponentielles dans le cadre général des paires de Guelfand.

1.2 Fonctions sphériques

Définition 1.2.1. *Soit (G,K) une paire de Guelfand. Une fonction sphérique (ou fonction zonale sphérique) sur G relativement à K est une fonction φ continue sur G, biinvariante par K, telle que l'application*

$$f \mapsto \chi(f) = \int_G f(x)\varphi(x^{-1})d\mu(x),$$

soit un caractère de l'algèbre de convolution $K^{\#}(G)$, c'est-à-dire

$$\chi(f*g) = \chi(f)\chi(g),\ \forall\ f,g \in \mathcal{K}^{\#}(G).$$

Si $G = \mathbb{R}$ et $K = \{0\}$ les fonctions sphériques sont les fonctions exponentielles : $e^{\lambda x}$, $(\lambda \in \mathbb{C})$.

Définition 1.2.2. *Soit (G,K) une paire de Guelfand. Une fonction continue φ définie sur G est dite de type positif si quels que soient les éléments $x_1, x_2, ..., x_N$ de G et les nombres complexes $c_1, c_2..., c_N$, on a*

$$\sum_{i,j=1}^{N} \varphi(x_i^{-1}x_j)c_i\overline{c_j} \geq 0.$$

Remarque 1.2.3. *Une fonction de type positif possède la symétrie hermitienne*

$$\varphi(x)^{-1} = \overline{\varphi(x)} \textit{ et de plus } \mid \varphi x \mid \leq \varphi(e).$$

Dans les espaces euclidiens, l'ensemble des fonctions sphériques de type positif est égal à l'ensemble des fonctions sphériques bornées.

Théorème 1.2.4. *Soit (G, K) une paire de Gelfand. Soit ϕ une fonction continue sur G, biinvariante par K, non identiquement nulle. La fonction ϕ est sphérique si et seulement si*

$$\int_K \phi(xky)\, d\mu_K(k) = \phi(x)\phi(y),$$

où μ_K désigne la mesure de Haar normalisée du sous-groupe compact K. En particulier $\phi(e)$ = 1.

Démonstration. Pour une fonction f de $K^{\#}(G)$, posons

$$\phi(f) = \int_G f(x)\phi(x^{-1})\, d\mu(x).$$

Soit g une fonction de $K^{\#}(G)$. Comme $(f * g)(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)\, d\mu(y)$, alors

$$\phi(f * g) \quad = \quad \int_G (f * g)(x)\phi(x^{-1}x)\, d\mu(x) = \int_G \int_G f(y)g(x)\phi(x^{-1})\, d\mu(x)d\mu(y).$$

De plus,

$$\phi(f)\phi(g) \quad = \quad \int_G \int_G f(y)g(x)\phi(x^{-1})\phi(y^{-1})\, d\mu(x)d\mu(y).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\phi(f * g) - \phi(f)\phi(g) &= \int_G \int_G [\phi(x^{-1}y^{-1}) - \phi(x^{-1})] f(y)g(x)\, d\mu(x)d\mu(y) \\
&= \int_G \int_G \left[\int_K \phi(x^{-1}ky^{-1})d\mu_K(k) - \phi(x^{-1})\phi(y^{-1})\right] f(y)g(x)\, d\mu(x)d\mu(y) \\
&= \int_G \int_G \left[\int_K \phi(xky^{-1})d\mu_K(k) - \phi(x)\phi(y)\right] f(y^{-1})g(x^{-1})\, d\mu(x)d\mu(y).
\end{aligned}$$

Si ϕ est sphérique alors

$$\phi(f * g) - \phi(f)\phi(g) = 0,$$

donc

$$\int_K \phi(xky)\, d\mu_K(k) = \phi(x)\phi(y),$$

localement presque partout. Réciproquement si

$$\int_K \phi(xky)\, d\mu_K(k) = \phi(x)\phi(y),$$

alors

$$\phi(f * g) = \phi(f)\phi(g),$$

pour toutes fonctions f et g de $K^{\#}(G)$ et ϕ est sphérique. □

Proposition 1.2.5. *Soit ϕ une fonction continue sur G, biinvariante par K. ϕ est sphérique si et seulement si*

— $\phi(e) = 1$.

— *Pour toute fonction f de $K^{\#}(G)$, on a $f * \phi = \chi(f).\phi$.*

Démonstration. Soit ϕ une fonction sphérique sur G.

— $\phi(e) = 1$. En effet, on a

$$\phi(y) = \phi(e)\phi(y), \text{ pour tout } y \in G, \text{ par conséquent } \phi(e) = 1.$$

— Soit f une fonction de $K^{\#}(G)$,

$$\begin{aligned}
(f * \phi)(x) &= \int_G f(y)\phi(y^{-1}x)\, d\mu(y) \\
&= \int_K d\mu_K(k) \int_G f(k^{-1}u)\phi(u^{-1}kx)\, d\mu(u), \text{ en posant } u = ky \\
&= \int_K d\mu_K(k) \int_G f(u^{-1}kx)\, d\mu(u) \\
&= \int_G f(u) \left[\int_K \phi(u^{-1}kx)\, d\mu_K(k)\right] d\mu(u) \\
&= \int_G f(u)\phi(u^{-1})\phi(x)\, d\mu(u) \\
&= \phi(x)\int_G f(u)\phi(u^{-1})\, d\mu(u) = \phi(x)\chi(f), \ \forall x \in G.
\end{aligned}$$

Ainsi $f * \phi = \chi(f).\phi$.

Réciproquement supposons (i) et (ii) soient vérifiées.

$$\begin{aligned}
\chi(f*g) &= \int_G (f*g)(x)\phi(x^{-1})\,d\mu(x) = \int\int_{G\times G} f(x)g(u^{-1}x)\phi(x^{-1})\,d\mu(x)d\mu(y) \\
&= \int_G f(y)\int_G \phi(x^{-1})g(y^{-1}x)\,d\mu(x)d\mu(y) \\
&= \int_G f(y)(g*\phi)(y^{-1})\,d\mu(y) = \int_G f(y)\chi(g)\phi(y^{-1})\,d\mu(y) \\
&= \chi(g)\int_G f(y)\phi(y^{-1})\,d\mu(y) = \chi(g)\chi(f),\ \forall f,g\in K^{\#}(G).
\end{aligned}$$

Donc χ est un caractère de l'algèbre de convolution. Il en résulte que ϕ est sphérique. □

Proposition 1.2.6. *Soit $L^1(G)^{\#}$ l'algèbre de convolution des fonctions intégrables sur G biinvariantes par K. Tout caractère non nul de $L^1(G)^{\#}$ est de la forme*

$$\chi(f) = \int_G f(x)\phi(x^{-1})\,d\mu(x),$$

où ϕ est une fonction sphérique bornée.

Démonstration. Soit χ un caractère non nul de $L^1(G)^{\#}$. On sait que tout caractère non nul d'une algèbre de Banach commutative est une forme linéaire continue de norme 1 au plus. Or toute forme linéaire continue sur $L^1(G)^{\#}$ s'écrit

$$f \longmapsto \int f\phi_0 d\mu,$$

où ϕ_0 est une fonction de $L^\infty(G)$. Par conséquent on peut poser

$$\chi(f) = \int_G f(x)\phi_0(x^{-1})\,d\mu(x) \text{ et } \mid \chi(f) \mid = \|\phi_0\|_\infty \leq 1.$$

Soit f_0 une fonction de $K^{\#}(G)$ telle que $\chi(f_0) \neq 0$. Pour toute fonction, $g \in K^{\#}(G)$, on a

$$\begin{aligned}
\chi(g) &= \chi(f_0)^{-1}\chi(g*f_0) = (f_0)^{-1}\int\int_{G\times G} g(y)f_0(y^{-1}x)\phi_0(x^{-1})\,d\mu(x)d\mu(y) \\
&= \int_G g(y)\phi(y^{-1})\,d\mu(y),
\end{aligned}$$

où l'on a posé $\phi(y) = \chi(f_0)^{-1}\int_G f_0(yx)\phi_0(x^{-1})\,d\mu(x)$. La fonction ϕ est biinvariante par K et $\phi(e) = 1$.

$$\begin{aligned}
\chi(f*g) &= \int\int_{G\times G} f(y)g(y^{-1}x)\phi(x^{-1})\,d\mu(x)d\mu(y) \\
&= \int_G g(y)\phi(y^{-1})\,d\mu(y) \\
&= \int\int_{G\times G} f(y)g(x)\phi(x^{-1}y^{-1})\,d\mu(x)d\mu(y) \\
&= \int_G g*\phi(y^{-1})\,d\mu(y).
\end{aligned}$$

De même,

$$\chi(g)\chi(f) \quad = \quad \chi(g)\int_G f(y)\phi(y^{-1}x)\,d\mu(y).$$

Par conséquent,

$$\chi(f*g)-\chi(f)\chi(g)=\int_G \left[g*\phi(y^{-1})-\chi(g)\phi(y^{-1})\right] f(y)\,d\mu(y) \quad = \quad 0.$$

Ceci étant vrai pour toutes fonctions f et g de $K^{\#}(G)$ on a

$$g*\phi(x)=\chi(g)\phi(x),$$

presque partout et d'après la proposition 1.2.5, ϕ est presque partout égale à une fonction sphérique. □

Remarque 1.2.7. *Supposons G commutatif et considérons la paire de Guelfand $(G,\{e\})$. On peut alors identifier l'espace $K^{\#}(G)$ à l'espace $K(G)$. L'équation fonctionnelle des fonctions sphériques devient*

$$\phi(x.y)=\phi(x)\phi(y).$$

Autrement dit, une fonction sphérique sur G relativement à $\{e\}$ est un homomorphisme continu de G dans le groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de valeur absolue 1. On appelle encore ces homomorphismes, les caractères du groupe commutatif localement compact G.

Proposition 1.2.8. *Soit ϕ une fonction sur $G=SO(n)\ltimes\mathbb{R}^n$ biinvariante par $K=SO(n)$. Elle peut être considérée comme une fonction radiale sur E_n, le quotient de G par $SO(n)$. Pour qu'elle soit une fonction sphérique, il faut et il suffit qu'elle vérifie*

— *ϕ est de classe C^∞*

— *Il existe un nombre complexe λ tel que*
$$\Delta\phi=\lambda\phi,$$

— *$\phi(0)=1$*

Démonstration. Remarquons avant d'entamer la preuve que si Δ désigne l'opérateur de Laplace, et si f_1 et f_2 sont deux fonctions de classe C^2 sur E_n avec f_1 à support compact, on a

$$\Delta(f_1*f_2)=\Delta f_1*f_2=f_2*\Delta f_1.$$

Supposons ϕ sphérique. Pour toute fonction radiale f, continue et à support compact, on a d'après la proposition 1.2.5, la relation

$$f * \phi = \chi(f).\phi \tag{1.2}$$

où $\chi(f) = \int_G f(x)\phi(-x)d\mu(x)$. Si f est une fonction de classe C^∞ et $\chi(f) \neq 0$, alors d'après (1.2), ϕ est aussi de classe C^∞ et on a

$$\Delta f * \phi = \chi(\Delta f)\phi = f * \Delta\phi = \chi(f)\Delta\phi.$$

Donc

$$\chi(\Delta f)\phi = \chi(f)\Delta\phi.$$

Et

$$\Delta\phi = \lambda\phi \text{ avec } \lambda = \frac{\chi(\Delta f)}{\chi(f)}.$$

Réciproquement, montrons que ϕ est sphérique. Soit f une fonction radiale sur E_n continue et à support compact. La fonction $\psi = f * \phi$ est radiale comme composée de deux fonctions radiales et de classe C^∞.

$$\Delta\psi = \Delta(f * \phi) = f * \Delta\phi = \lambda(f * \phi) = \lambda\psi,$$

donc ψ est solution de l'équation $\Delta\psi = \lambda\psi$. Par conséquent $\psi = C\phi$ où C est un nombre ne dépendant que de f, c'est-à-dire $C = \chi(f)$ et par suite

$$f * \phi = \chi(f).\phi.$$

D'après la proposition 1.2.5, ϕ est sphérique. □

1.2.1 Quelques exemples de fonctions sphériques

Exemple 1 Considérons la paire de Guelfand (G, K) où $G = \mathbb{R}$ et $K = \{0\}$. Les fonctions sphériques sur G relativement à K sont les fonctions exponentielles de la forme : $\phi(x) = e^{i\lambda x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple 2 Soient z un nombre complexe et u un vecteur unitaire de E_n. La fonction ϕ_z définie par

$$\phi_z(x) = \int_{S^{n-1}} e^{z(u/x)} d\sigma(u),$$

où S^{n-1} est la sphère unité de E_n et σ une mesure de Haar normalisée sur S^{n-1}, est une fonction sphérique sur $SO(n) \times \mathbb{R}^n$ relativement à $SO(n)$. En effet, posons

$$f(x) = e^{z(u/x)}.$$

Donc

$$\phi_z(x) = \int_{S^{n-1}} f(x) d\sigma(u).$$

Comme

$$\Delta f = z^2 f \text{ alors } \Delta \phi_z(x) = z^2 \phi_z(x).$$

Et

$$\phi_z(0) = \int_{S^{n-1}} d\sigma(u) = 1.$$

Il résulte de la proposition 1.2.8, que ϕ_z est une fonction sphérique.

Exemple 3 Soient l'espace HS_ℓ des harmoniques sphériques de degré ℓ, c'est-à dire l'espace des fonctions sur S^{n-1} qui sont des restrictions à la sphère-unité des polynômes harmoniques homogènes de degré ℓ et ϕ_ℓ la fonction zonale de HS_ℓ telle que $\phi_\ell(e_0) = 1$.

La fonction ϕ_ℓ peut être considérée comme une fonction sur $SO(n+1)$ biinvariante par $SO(n)$ et ϕ_ℓ est une fonction sphérique.

En effet, Soit f une fonction continue sur $SO(n+1)$, biinvariante par $SO(n)$. Posons $\psi = f * \phi_\ell$. La fonction ψ est biinvariante par $SO(n)$ et considérée comme une fonction sur S^n, c'est donc une harmonique sphérique de degré ℓ et zonale.

$$\forall x \in G,\, \psi(x) = f * \phi_\ell(x) = \int_G f(y)\phi_\ell(y^{-1}x)\, d\mu(y).$$

Comme les zonales de HS_ℓ constituent un espace vectoriel de dimension 1, ψ est proportionnelle à ϕ_ℓ.

$$\psi = f * \phi_\ell = \chi_\ell(f)\phi_\ell.$$

avec

$$\chi_\ell(f) = \int_G f(y)\phi_\ell(y^{-1})\, d\mu(y).$$

Exemple 4 Considérons le cas $G = SL(2,\mathbb{R})$. Ainsi soient K, A_p, N respectivement les sous-groupes à un paramètre de G générés par les matrices k_θ, h_t, n_ξ où

$$k_\theta = \begin{pmatrix} Cos(\theta/2) & Sin(\theta/2) \\ -Sin(\theta/2) & Cos(\theta/2) \end{pmatrix},$$

$$h_t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix},$$

$$n_\xi = \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

avec $0 \leq \theta < 4\pi$, t, ξ réels. Alors $d_G(x) = (4\pi)^{-1}e^t d\theta dt d\xi$, si $x = k_\theta h_t n_\xi$, $x \in G$.

Pour tout complexe ν, soit χ_ν la fonction définie sur G par la relation suivante

$$\chi_\nu(x) = e^{(i\nu-1/2)t},\ (x = k_\theta h_t n_\xi).$$

Alors la fonction sphérique ϕ_ν associée à ν est donnée sur A_p par

$$\begin{aligned} \phi_\nu(h_t) &= (4\pi)^{-1}\int_0^{4\pi} \chi_\nu(k_\theta^{-1}h_t k_\theta)\, d\theta \\ &= (2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} (\cosh t + \sinh t\cos(\theta))^{i\nu-1/2}\, d\theta,\ t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

1.3 Fonctions sphériques de type δ

Dans cette section, nous aborderons dans le détail la notion de fonction sphérique suivant une classe donnée de représentations irréductibles.

1.3.1 Définition et Généralités

Soient G un groupe localement compact unimodulaire, K un sous-groupe compact de G, $\hat{K}$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles de K. Pour toute classe de $\hat{K}$, notons ξ_δ le caractère de δ, $d(\delta)$ le degré de δ et $\chi_\delta = d(\delta)\xi_\delta$. Si $\check{\delta}$ est la classe des représentations contragrédientes de δ dans $\hat{K}$, on a $\chi_\delta = \chi_{\check{\delta}}$ et on vérifie grâce à la relation d'orthogonalité de Schur que $\chi_{\check{\delta}} * \chi_{\check{\delta}} = \chi_{\check{\delta}}$.
Pour toute fonction $f \in K(G)$, on pose

$$\begin{aligned} {}_\delta f(x) &= \bar{\chi_\delta} * f(x) &= \int_K \chi_\delta(k) f(kx)\, dk \\ f_\delta(x) &= f * \bar{\chi_\delta}(x) &= \int_K \chi_\delta(k^{-1}) f(xk)\, dk, \end{aligned}$$

où dk est la mesure de Haar normalisée sur K, et

$$K_\delta(G)=\{f\in K(G), f={}_\delta f=f_{\check{\delta}}\}.$$

On montre que $K_\delta(G)$ est une sous-algèbre de $K(G)$ et que l'application $\bar{\chi}_{\check{\delta}}*f*\bar{\chi}_{\check{\delta}}$ est une projection de $K(G)$ sur $K_\delta(G)$. Soit U une représentation de Banach de G sur E, on pose $P(\delta)=U(\bar{\chi}_\delta)$ et $E(\delta)=P(\delta)E$. Si $g=\bar{\chi}_{\check{\delta}}*f*\bar{\chi}_{\check{\delta}}$, on a $P(\delta)U(f)P(\delta)=U(g)$, $\forall f\in K(G)$. Ainsi $E(\delta)$ est stable pour $U(f)$ (*avec* $f\in K_\delta(G)$). En notant $U_\delta(f)$ la restriction de $U(f)$ à $E(\delta)$, on obtient une représentation $f\mapsto U_\delta(f)$ de $K_\delta(G)$ sur $E(\delta)$.

Définition 1.3.1 ($K_\delta^{\#}(G)$ - notations & définitions)**.** *Soit $\mathfrak{J}_c(G)$ l'ensemble des fonctions f de $K(G)$ qui sont centrales par K (i.e. $f(kx)=f(xk)$ $\forall k\in K$ et $x\in G$). $\mathfrak{J}_c(G)$ est une sous-algèbre de $K(G)$ et l'application $f\longrightarrow f_K$, avec $f_K(x)=\displaystyle\int_K f(kxk^{-1})\,dk$, est une projection de $K(G)$ sur $\mathfrak{J}_c(G)$. Pour deux éléments $f,g\in K(G)$, on a les propriétés suivantes $(f_K*g)_K=f_K*g_K=(f*g_K)_K$ et*

$$(\bar{\chi}_\delta*f)_K=\bar{\chi}_\delta*f_K=(f*\bar{\chi}_\delta)_K=f_K*\bar{\chi}_\delta.$$

Posons

$$K_\delta(G)\bigcap\mathfrak{J}_c(G)=K_\delta^{\#}(G).$$

On remarque que $K_\delta^{\#}(G)$ est une sous-algèbre de $K(G)$ et que l'application $f\longmapsto\bar{\chi}_\delta*f_K$ est une projection de $K(G)$ sur $K_\delta^{\#}(G)$. Cette algèbre est non commutative. De plus, si δ est une classe de représentations triviales de dimension 1 de K, tout élément de $K_\delta^{\#}(G)$ est biinvariante par K. L'algèbre $K_\delta^{\#}(G)$ s'identifie donc à l'algèbre $K^{\#}(G)$.
Si K est un sous-groupe compact de G et U une représentation de Banach topologiquement irréductible de G sur E, alors l'ensemble des opérateurs $U_\delta(f)$, $(f\in K_\delta^{\#}(G))$ est le centralisateur de la représentation $k\longmapsto U_\delta(k)$ de K sur $E(\delta)$.

Remarque 1.3.2. *Si la représentation $k\longmapsto U_\delta(k)$ de K sur $E(\delta)$ se décompose en m représentations irréductibles équivalentes, on montre que le centralisateur est isomorphe à l'algèbre $\mathbb{M}_m(\mathbb{C})$ des matrices carrées d'ordre m. Par conséquent, d'après la proposition précédente, il existe un isomorphisme $U_\delta(f)\longmapsto u_\delta(f)$ de l'algèbre $\{U_\delta(f), f\in K_\delta^{\#}(G)\}$ sur $\mathbb{M}_m(\mathbb{C})$, où $f\longmapsto u_\delta(f)$ est une représentation irréductible de dimension m de $K_\delta^{\#}(G)$ avec*

$$Tr(U_\delta(f))=d(\delta)tr(u_\delta(f))\qquad(f\in K_\delta^{\#}(G)).$$

Proposition 1.3.3. *L'algèbre $K_\delta^{\#}(G)$ est isomorphe à l'algèbre $U_{c,\delta}(G)$ des fonctions continues à support compact ψ de G dans $F_{\check{\delta}}=Hom_{\mathbb{C}}(E_{\check{\delta}},E_{\check{\delta}})$ et qui vérifient la relation*

$$\psi(k_1xk_2) = u_{\check{\delta}}(k_1)\psi(x)u_{\check{\delta}}(k_2).$$

Nous définissons maintenant la notion de fonction trace sphérique de type δ.

Définition 1.3.4. *Soit $\delta \in \hat{K}$. La fonction ψ_δ^U sur G définie par*

$$\psi_\delta^U(x) = tr(P(\delta)U(x)P(\delta)),$$

est appelée fonction trace sphérique de type δ correspondant à la représentation U.
Si δ est contenue m fois dans la restriction de U à K alors ψ_δ^U est dite de hauteur m et cette hauteur est notée $ht(\psi_\delta^U) = (U/_K : \delta)$.

Définition 1.3.5. *Une semi-norme η sur G est une fonction positive semicontinue inférieurement et bornée sur tout compact de G telle que*

$$\eta(xy) \leq \eta(x)\eta(y) \qquad (x, y \in G).$$

Définition 1.3.6 (Fonction quasi-bornée)**.** *Une fonction f sur G à valeurs dans un espace de Banach est dite quasi-bornée s'il existe une semi-norme η sur G telle que*

$$||f||_\eta := \sup_{x\in G} \frac{||f(x)||}{\eta(x)} < \infty.$$

Définition 1.3.7 (Fonction sphérique de type δ)**.** *Soit $\delta \in \hat{K}$. Une fonction sphérique ϕ de G de type δ est une fonction continue quasi-bornée sur G à valeurs dans $Hom_{\mathbb{C}}(E, E)$, (E étant un espace vectoriel de dimension finie) telle que*

(i) $\phi(kxk^{-1}) = \phi(x)$,

(ii) $\chi_\delta * \phi = \phi \, (= \phi * \chi_\delta)$,

(iii) L'application $u_\phi : f \longmapsto \phi(f) = \displaystyle\int_G f(x)\phi(x)\, dx$ est une représentation irréductible de l'algèbre $K_\delta^{\#}(G)$.

Proposition 1.3.8. *Soit ϕ une fonction continue quasi-bornée sur G à valeurs dans $Hom_{\mathbb{C}}(E, E)$ telle que*

$$\phi_K = \phi \text{ et } \chi_\delta * \phi = \phi.$$

La fonction ϕ est sphérique de type δ si et seulement si

$$\int_K \phi(kxk^{-1}y)\, dk = \phi(x)\phi(y) \qquad (x, y \in G).$$

1.3.2 Exemple de fonctions sphériques de type δ

Exemple Soit $H_2 = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}$ le groupe de Heisenberg muni de la multiplication

$$(z,t).(z',t') = \Big(z + z', t + t' + \tfrac{1}{2} Im(z\bar{z'})\Big),$$

où Im désigne la partie imaginaire. Soit $w \in \mathbb{C}^2$; on définit un caractère noté χ_w sur H_2 par $\chi_w(z,t) = e^{iRe\langle w,z\rangle}$ où Re désigne la partie réelle. Soit $SU(2)$ le groupe special unitaire d'ordre 2.
On a

$$SU(2) = \left\{ U_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \text{ tel que } a, b \in \mathbb{C} \text{ et } \mid a \mid^2 + \mid b \mid^2 = 1 \right\},$$

et l'action de $U_{a,b}$ sur $\mathbb{C}^2$ est définie par

$$U_{a,b}.Z = U_{a,b} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az_1 - \bar{b}z_2 \\ bz_1 + \bar{a}z_2 \end{pmatrix},$$

et l'action de $SU(2)$ sur H_2 est définie par

$$U_{a,b}(z,t) = (U_{a,b}z, t),$$

et

$$U_{a,b} = A^{-1}\sigma(\theta)A \text{ où } \sigma(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}.$$

Soit Θ l'espace des polynômes sur $\mathbb{C}^2$ et V_n le sous-espace de Θ des polynômes de degré n. On a

$$V_n = \left\{ P \in \Theta \text{ tel que } P(z_1, z_2) = \sum_0^n c_i z_1^i z_2^{n-i} \text{ avec } c_i \in \mathbb{C} \right\}.$$

L'espace V_n est de dimension $n+1$ et on définit une action de $SU(2)$ sur Θ pour une représentation π par

$$\begin{aligned} \pi(U_{a,b})P(z_1,z_2) &= P\Big(U_{a,b}^{-1}.(z_1,z_2)\Big) \\ &= P(az_1 - \bar{b}z_2, bz_1 + \bar{a}z_2). \end{aligned}$$

La restriction π à V_n notée π_n est irréductible pour tout $n > 0$.
Posons $G = SU(2) \times H_2$ et $K = SU(2)$. Soit χ_w un caractère sur H_2 et π_n une représentation irréductible sur $SU(2)$. Alors la fonction $\phi^{n,w}$ définie sur $SU(2) \times H_2$ par

$$\phi^{n,w}(U_{a,b}(z,t)) = \int_{SU(2)} \chi_w(U_{a_1,b_1}(z,t))\pi_n(U^{-1}_{a_1,b_1}U_{a,b}U_{a_1,b_1})da_1db_1$$

est sphérique de type π_n.

Chapitre 2

Transformée de Fourier sphérique généralisée

2.1 Transformation de Fourier sphérique

Transformation de Fourier sphérique

Nous supposons dans ce paragraphe que (G, K) est une paire de Guelfand. Soit $\sum$ le spectre de l'algèbre de Banach commutative $L^1(G)^\#$. Nous avons vu que $\sum$ s'identifie à l'ensemble des fonctions sphériques bornées d'après la proposition 1.2.6. Muni de la topologie de Guelfand qui est aussi celle de la convergence uniforme sur tout compact de G, $\sum$ est un espace localement compact. Soit f une fonction de $L^1(G)^\#$. La transformée de Fourier sphérique de $\widehat{f}$ est la fonction f définie sur $\sum$ par

$$\widehat{f}(w) = \int f(x) w(x^{-1}) dx \ , \ (w \in \textstyle\sum).$$

La fonction $\widehat{f}$ appartient à l'espace $C_0(\sum)$ des fonctions continues sur E tendant vers 0 à l'infini. La transformation de Fourier sphérique de f

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F}: & L^1(G)^\# & \longrightarrow & C_0(\sum) \\ & f & \longmapsto & \widehat{f}, \end{array}$$

est un homomorphisme d'algèbre normée. C'est la transformation de Guelfand associée à l'algèbre de Banach commutative $L^1(G)^\#$.
Remarquons la relation

$$f * w = \widehat{f}(w).w.$$

Notons Ω l'ensemble des fonctions sphériques de type positif, Ω est un fermé de $\sum$.

Un des principaux problèmes de l'analyse harmonique est de décomposer une représentation unitaire à l'aide de représentations unitaires irréductibles. La transformation de Fourier sphérique est liée à la décomposition des représentations unitaires sphériques, c'est-à-dire admettant un vecteur K - invariant et cyclique.

Nous allons commencer par établir une représentation intégrale des fonctions continues de type positif biinvariantes par K. C'est une généralisation du théorème de Bochner. Le théorème de Bochner classique concerne le groupe $G = \mathbb{R}$ et s'énonce comme suit
soit φ une fonction continue de type positif sur $\mathbb{R}$. Il existe une mesure positive bornée μ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\varphi(x) = \int_G e^{i\lambda x} d\mu(\lambda).$$

Soit μ une mesure de Radon positive bornée sur Ω, la fonction φ définie sur G par

$$\varphi(x) = \int_\Omega w(x) d\mu(w),$$

est continue, biinvariante par K et de type positif, et réciproquement nous avons

Théorème 2.1.1. *(Théorème de Bochner - Godement)*
Soit φ une fonction continue sur G , de type positif et biinvariante par K. Il existe une mesure de Radon μ sur Ω, positive et bornée telle que

$$\varphi(x) = \int_\Omega w(x) d\mu(w).$$

La mesure μ est unique.

Démonstration. a) Montrons d'abord que la mesure μ, si elle existe, est unique. Soit f une fonction de $L^1(G)^\#$. D'après le théorème de Fubini,

$$\int_G \varphi(x^{-1}) f(x) d\mu(x) = \int_\Omega w(x) d\mu(w).$$

L'unicité de la mesure μ se déduit de cette relation et du fait que $\{\widehat{f} | f \in L^1(G)^\#\}$ est dense dans $C_0(\Omega)$ d'après le théorème de Stone-Weierstrass qui dit

Théorème 2.1.2. *(Théorème de Stone-Weierstrass) Soient X un espace compact et $C(X)$ l'algèbre de Banach des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$. Une sous-algèbre est dense dans $C(X)$ si (et seulement si) elle sépare les points et contient, pour tout point x de X, une fonction qui ne s'annule pas en x.*

b) Pour montrer l'existence de la mesure μ , nous allons utiliser le théorème de **Krein-Milman** qui dit la chose suivante

Théorème 2.1.3. *(Théorème de Krein-Milman) Tout convexe compact d'un espace localement convexe séparé est l'enveloppe convexe-fermée de l'ensemble de ses points extrémaux.*

Rappelons que $P^1(G)$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur G, de type positif, biinvariantes par K et telles que $\varphi(e) \leq 1$.
L'ensemble $P^1(G)$ est un convexe de $L^\infty(G)$, compact pour la topologie *-faible $\sigma(L^\infty(G), L^1(G))$ les points extrémaux non nuls de cet ensemble sont les fonctions sphériques de type positif. Notons $M(\Omega)$ l'espace des mesures de Radon bornées sur Ω et $M_1^+(\Omega)$ l'ensemble des mesures positives μ telles que $\int d\mu \leq 1$. Si l'espace $M(\Omega)$ est muni de la topologie *faible $\sigma(M(\Omega), C_0(\Omega))$, l'ensemble $M_1^+(\Omega)$ est compact. Considérons l'application T de $M_1^+(\Omega)$ dans $P^1(G)^*$ définie par

$$\varphi(x) = T_\mu(x) = \int_\Omega w(x) d\mu(w).$$

Soit f une fonction de $L^1(G)$. D'après le théorème de Fubini,

$$\int_G f(x)\varphi(x^{-1})d(x) = \int_\Omega \widehat{f}(w)d\mu(w).$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\int_G f(x)\varphi(x^{-1})dx &= \int_G f(x)\int_\Omega w(x^{-1})d\mu(w)d\mu(x) \\
&= \int_\Omega \int_G f(x)w(x^{-1})d\mu(x)d\mu(w) \\
&= \int_\Omega \widehat{f}(w)d\mu(w).
\end{aligned}$$

De cette relation, il résulte que l'application T est continue pour les topologies * faibles considérées ci-dessus. L'ensemble $M_1^+(\Omega)$ étant compact, son image est compacte. De plus, son image contient les points extrémaux de $P^1(G)^*$. Le théorème de Krein-Milman nous permet de conclure que T est surjective. □

Pour terminer ce paragraphe nous allons établir la formule de Plancherel. Si f est une fonction de $L^1(R) \cap L^2(R)$. Nous savons que f est de carré intégrable où

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_G e^{-i\lambda x} f(x)dx,$$

et que

$$\int |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\lambda.$$

C'est la formule de Plancherel classique. Nous allons la généraliser au cas de la transformation de Fourier sphérique.
Soit f une fonction continue de type positif, biinvariante par K. D'après le théorème de Bochner-Godement, il existe une mesure positive bornée μ_f sur Ω telle que

$$f(x) = \int w(x) d\mu_f(w).$$

Si g est une fonction de $L^1(G)^\#$ alors

$$\begin{aligned} g * f(x) &= \int g * w(x) d\mu_f(w) \\ &= \int w(x) \widehat{g}(w) d\mu_f(w). \end{aligned}$$

Il en résulte que si g est aussi continue de type positif et si f est intégrable

$$\mu_{f*g} = \widehat{g}\mu_f = \widehat{f}\mu_g.$$

Pour une fonction f continue de type positif et intégrable posons, sur l'ouvert $\Omega_f = \{w \in \Omega | \widehat{f}(w) \neq 0\}$,

$$\sigma_f = \frac{1}{\widehat{f}}\mu_f.$$

Si f et g sont deux telles fonctions, les mesures σ_f et σ_g coïncident sur $\Omega_f \cap \Omega_g$. On en déduit l'existence d'une mesure de Radon positive σ sur Ω telle que, pour toute fonction continue de type positif sur G, biinvariante par K et intégrable, on a

$$\mu_f = \widehat{f}.\sigma.$$

Cette mesure σ s'appelle la mesure de Plancherel.

Théorème 2.1.4. *(Théorème de Plancherel- Godement)*

a) Si f est une fonction continue de type positif, biinvariante par K et intégrable, alors f est intégrable par rapport à la mesure de Plancherel σ et

$$f(x) = \int_\Omega w(x) \widehat{f}(w) d\sigma(w).$$

b) Si f est une fonction biinvariante par K, intégrable et de carré intégrable, alors f est de carré intégrable par rapport à la mesure de Plancherel σ et,

$$\int_G |f(x)|^2 dx = \int_\Omega |\widehat{f}(w)|^2 d\sigma(w).$$

C'est la formule de Plancherel.

c) La transformation de Fourier sphérique. considèrée comme application de $(L^1(G) \cap L^2(G))^\#$ *dans* $L^2(\Omega, \sigma)$ *se prolonge en un isomorphisme de* $L^2(G)^\#$ *sur* $L^2(\Omega, \sigma)$.

Démonstration. La partie a) de l'énoncé résulte directement de la définition de la mesure σ. Soit f une fonction biinvariante par K, intégrable et de carré intégrable. Posons

$$h = f * \tilde{f}.$$

C'est-à-dire

$$h(x) = \int_G f(xy)\overline{f(y)}.$$

La fonction h est continue, de type positif et intégrable, de plus $\widehat{h} = |\widehat{f}|^2$. La formule de Plancherel s'obtient en écrivant pour h la formule d'inversion en $x = e$.

Pour montrer la partie c) de l'énoncé, il suffit de montrer que l'espace

$$\{\widehat{f} \mid f \in (L^1(G) \cap L^2(G))^\#\},$$

est dense dans $L^2(\Omega, \sigma)$.
Soit F une fonction continue sur $\sum$ à support compact. Du fait que l'espace $\{\widehat{f}|f \in L^1(G)^\#\}$ est dense dans $C_0(\Omega)$, on déduit qu'il existe une fonction g continue sur G, à support compact et biinvariante par K telle que

$$\forall w \in \Omega \cap Supp(F), \, \widehat{g}(w) > 0,$$

et une fonction $F^{'}$ continue sur Ω à support compact telle que

$$\forall w \in \Omega, F(w) = \widehat{g}(w)F^{'}(w).$$

Soit $\epsilon > 0$. Il existe une fonction h continue sur G à support compact et biinvariante par K telle que

$$\forall w \in \Omega, |F^{'}(w) - \widehat{h}(w)| \leq \epsilon,$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned}\forall w \in \Omega, |F(w) - \widehat{g * h}(w)| &= |F(w) - \widehat{g}(w)\widehat{h}(w)| \\ &= |\widehat{g}(w)||F^{'}(w) - \widehat{h}(w)| \leq \epsilon\, |\widehat{g}(w)|.\end{aligned}$$

D'où

$$\int_{\Omega} |F(w) - \widehat{g * h}(w)|^2 d\sigma(w) \leq \epsilon^2 \int_{\Omega} |\widehat{g}(w)|^2 d\sigma(w).$$

$\square$

Théorème 2.1.5. *(Formule d'inversion) Soit f une fonction de $C_C(G)^*$. Si*

$$\int_{\Omega} |\widehat{f}(w)| d\sigma(w) < \infty,$$

alors pour tout x de G,

$$f(x) = \int_{\Omega} \widehat{f}(w) w(x) d\sigma(w).$$

Si h est une autre fonction de $C_C(G)^*$, d'après la formule de Plancherel, on a

$$h * h(x) = \int_{\Omega} w(x)\widehat{f}(w)\widehat{h}(w) d\sigma(w).$$

Soit h_V l'approximation de l'identité. Nous avons

$$\lim_{\mathcal{V}} (f * h_V) = f(x),$$

de plus,

$$\begin{gathered}|\widehat{h}_V(w)| \leq 1, \\ \lim_{\mathcal{V}} (\widehat{h}_V) = 1.\end{gathered}$$

Donc, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{\mathcal{V}} \int w(x)\widehat{f}(w)\widehat{h}_V(w) d\sigma(w) = \int w(x)\widehat{f}(w) d\sigma(w).$$

Remarque 2.1.6. *1) Si G est commutatif et si $K = \{e\}$, l'ensemble $\sum$ possède une structure de groupe commutatif, c'est le groupe dual $\widehat{G}$. Dans ce cas $\Omega = \widehat{G}$ et σ est une mesure de Haar sur G.*
2) Nous avons l'inclusion,

$$Supp(\sigma) \subset \Omega \subset \sum.$$

Dans certains cas ces inclusions sont strictes.

Une autre formulation de la Transformée de Fourier sphérique

Transformée de Gelfand Soit A une algèbre commutative ayant un élément neutre e.

Définition 2.1.7. *Pour tout $x \in A$, on appelle transformée de Gelfand de x l'application $\mathfrak{g}x$ de $X(A)$ dans $\mathbb{C}$ définie par*

$$\begin{array}{rccc} \mathfrak{g}x : & X(A) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \chi & \longmapsto & \chi(x), \end{array}$$

où $X(A)$ est le spectre de A. L'application $x \mapsto \mathfrak{g}x$ de A dans $\mathbb{C}^{X(A)}$ est appelée la transformation de Gelfand associée à l'algèbre A.

Proposition 2.1.8. *La transformation de Gelfand $x \longmapsto \mathfrak{g}x$ est un homomorphisme continu de l'algèbre de Banach A dans l'algèbre de Banach $C_{\mathbb{C}}(X(A))$ des fonctions complexes continues sur $X(A)$.*

Soient (G, K) une paire de Gelfand, $S(G/K)$ l'espace des fonctions sphériques bornées sur G relativement à K et μ une mesure de Haar à gauche. Nous avons vu que si ϕ appartient à $S(G/K)$, alors l'application $\chi(f) = \displaystyle\int_G f(x)\phi(x^{-1})\, d\mu(x)$ est un caractère de $L^1(G)^\#$ et tout caractère de $L^1(G)^\#$ est de cette forme. Par conséquent l'application $\phi \longmapsto \chi(\phi)$ est bijective et permet d'identifier l'espace $S(G/K)$ au spectre de l'algèbre de Banach $L^1(G)^\#$.

Comme F est un homéomorphisme, alors d'après le diagramme ci-dessous, la transformée de Gelfand d'un élément f de $L^1(G)^\#$ peut être identifiée à la fonction complexe $\mathfrak{F}$ définie sur $S(G/K)$ par

$$\mathfrak{F}f(\phi) = \int_G f(x)\phi(x^{-1})\, d\mu(x),$$

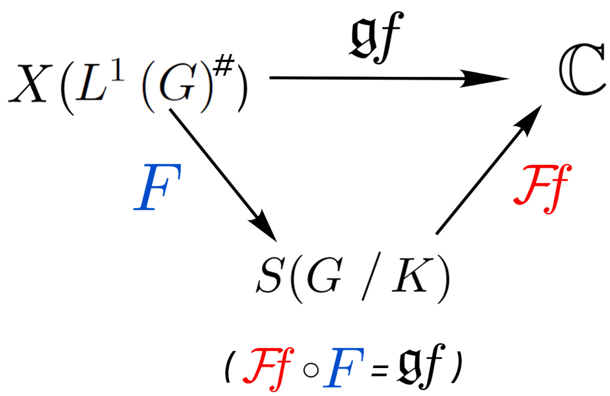

FIGURE 2.1 – Transformée de Fourier sphérique.

D'où la définition suivante.

Définition 2.1.9. *Soit f une fonction de $L^1(G)^\#$. On appelle transformée de Fourier sphérique de la fonction f, la fonction $\mathfrak{F}f$ définie sur $S(G/K)$ par*

$$\mathfrak{F}f(\phi) = \int_G f(x)\phi(x^{-1})\, d\mu(x).$$

2.2 Transformée de Fourier sphérique de type δ

Proposition 2.2.1. *Si U est une représentation irréductible de Banach de G dans un espace E telle que δ soit contenue dans la restriction de U à K, alors il existe une fonction ϕ_δ^U définie sur G, qui est sphérique de type δ. La fonction ϕ_δ^U est dite associée à la représentation U.*

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée involutive complexe et $X_m(\mathcal{A})$ l'ensemble des réprésentations unitaires irréductibles de A de dimension finie m.

Définition 2.2.2 (Transformée de Gelfand généralisée et Transformée sphérique de type δ). *Pour tout élément f de A, nous appelons transformée de Gelfand généralisée de f, l'application notée $\mathfrak{g}f$ de $X_m(\mathcal{A})$ dans l'algèbre $\mathbb{M}_m(\mathbb{C})$ des matrices carrées d'ordre m définie par*

$$\begin{array}{rrcl} \mathfrak{g}f : & X_m(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathbb{M}_m(\mathbb{C}) \\ & u & \longmapsto & u(f). \end{array}$$

L'homomorphisme $f \longmapsto \mathfrak{g}f$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{M}_m(\mathbb{C})^{X_m(\mathcal{A})}$ est appelé la transformation de Gelfand généralisée associée à l'algèbre $\mathcal{A}$.

Si l'algèbre $\mathcal{A}$ est commutative, les représentations unitaires irréductibles de $\mathcal{A}$ sont de dimension 1, donc s'identifient aux caractères de $\mathcal{A}$ et on retrouve la définition de la transformation de Gelfand usuelle. Soit $S_\delta^m(G)$ l'ensemble des fonctions sphériques de type δ sur G de hauteur m. Ainsi, si ϕ est une fonction de $S_\delta^m(G)$, il existe une représentation $u_\delta^\phi \in X_m(K_\delta^\#(G))$ telle que $u_\delta^\phi(f) = \int_G f(x)\phi(x)\, d_G x$ et réciproquement. Ce qui permet d'identifier les espaces $S_\delta^m(G)$ et $X_m(K_\delta^\#(G))$ et ensuite définir la transformation de Fourier sphérique de type δ suivant le diagramme ci-après.

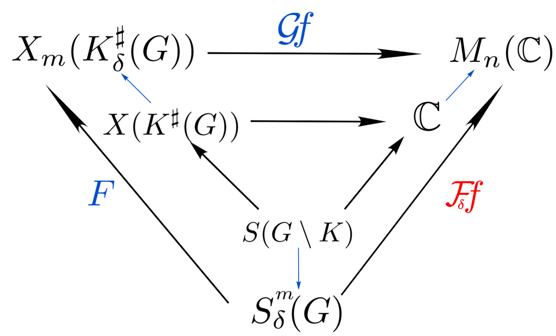

FIGURE 2.2 – Transformée de Fourier sphérique de type δ

Un exemple avec les transformées de Fourier sphériques de type δ

Considérons, avec les mêmes hypothèses, l'exemple précédent traité dans la section 1.3.2, et prenons pour acquis les résultats qui y ont été obtenus. La fonction $\phi^{n,w}$ définie sur $SU(2)\times H_2$ par

$$\phi^{n,w}(U_{a,b}(z,t)) = \int_{SU(2)} \chi_w(U_{a_1,b_1}(z,t))\pi_n(U_{a_1,b_1}^{-1}U_{a,b}U_{a_1,b_1})da_1db_1,$$

est sphérique de type π_n, tel qu'obtenu précédemment.

Soit $f \in K_\delta^\#\Big(SU(2) \times H_2, End_{\mathbb{C}}(V_n)\Big)$, La transformation de Fourier sphérique de type π_n est définie par

$$\mathcal{F}(f)(\phi^{n,w}) = \int_{SU(2)\times H_2} \chi_w(z,t)\pi_n(U_{a,b})f(U_{a,b}^{-1}U_{a,b}^{-1}.(z,t))dzdtdadb.$$

2.3 Théorème de Bochner généralisé pour les fonctions sphériques de type δ

Dans la suite, nous désignerons par Ω l'espace des fonctions sphériques de type $\delta-$positif.

Théorème 2.3.1. *Soit ϕ une fonction continue de $K_\delta^{\#}(G)$ de type positif à valeurs dans $End_{\mathbb{C}}(E)$ telle que $\|\phi\|_\eta \leq 1$. Alors il existe une mesure de Radon μ sur Ω positive, bornée, telle que*

$$\phi(x) = \int_\Omega \omega(x)d\mu(\omega).$$

La mesure μ est unique. Réciproquement, si μ est une mesure de Radon positive, bornée sur Ω alors la fonction ϕ définie par

$$\phi(x) = \int_\Omega \omega(x)d\mu(\omega),$$

est une fonction de $K_\delta^{\#}(G)$ de type positif à valeurs dans $End_{\mathbb{C}}(E)$.

Démonstration. Soit μ une mesure de Radon positive sur Ω. On a

$$\begin{aligned}\phi(kx) &= \int_\Omega \omega(kx)d\mu(\omega)\\ &= \int_\Omega \omega(xk)d\mu(\omega)\\ &= \phi(xk)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}{}_\delta\phi(x) &= \overline{\chi_\delta} * \int_\Omega \omega(x)d\mu(\omega)\\ &= \phi(x).\end{aligned}$$

De même, $\phi_{\check{\delta}}(x) = \phi(x)$ car ϕ est $K-$centrale.

$$\begin{aligned}\left\langle \sum c_i\overline{c_j}\phi(x_ix_j^{-1})u,\, u\right\rangle &= \left\langle \int_\Omega \sum c_i\overline{c_j}\omega(x_ix_j^{-1})d\mu(\omega)u,\, u\right\rangle\\ &= \int_\Omega \left\langle \sum c_i\overline{c_j}\omega(x_ix_j^{-1})u,\, u\right\rangle d\mu(\omega) \geq 0.\end{aligned}$$

Pour la réciproque, montrons d'abord que la mesure μ, si elle existe, est alors unique. Soit f une fonction de $K_\delta^{\#}(G)$, daprès le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned}\int_G \phi(x^{-1})f(x)dx &= \int_G\int_\Omega w(x^{-1})f(x)d\mu(\omega)dx\\ &= \int_\Omega \mathcal{F}f(w)d\mu(\omega).\end{aligned}$$

D'où

$$f * \phi(e) = \mathcal{F}(\mu)\mathcal{F}(f).$$

L'unicité de la mesure μ se déduit de cette relation et du fait que l'ensemble

$$\left\{\mathcal{F}f \text{ telle que } f \in K_\delta^\#(G)\right\}$$

est dense dans $C_0(\Omega)$, l'espace des fonctions continues sur Ω tendant vers 0 à l'infini. Pour montrer l'existence de la mesure μ, nous utiliserons le théorème de Krein-Milman.
Considérons l'espace $P_{1,\delta}(G, End_{\mathbb{C}}(E))$ des fonctions quasi-bornées de $K_\delta^\#(G)$ de type positif ω telles que $\|\omega\|_\rho \leq 1$, $M_1(\Omega)$ l'ensemble des mesures de Radon positives μ sur Ω telle que $\displaystyle\int d\mu \leq 1$ et l'application

$$T : M_1(\Omega) \longrightarrow P_{1,\delta}(G, End_{\mathbb{C}}(E))$$

définie par

$$T(\mu)(x) = \int_\Omega \omega(x) d\mu(\omega).$$

L'espace $P_{1,\delta}(G, End_{\mathbb{C}}(E))$ est un fermé de la boule unité de $L_\rho^\infty(G, End_{\mathbb{C}}(E))$ où $L_\rho^\infty(G, End_{\mathbb{C}}(E))$ est l'espace des fonctions ϕ continues sur G à valeurs dans $End_{\mathbb{C}}(E)$ telles que $\|\phi\|_\rho \leq \infty$. L'espace $P_{1,\delta}(G, End_{\mathbb{C}}(E))$ est compact pour la topologie $^*faible$ $\sigma(L_\rho^\infty(G, End_{\mathbb{C}}(E)), L_\rho^1(G, End_{\mathbb{C}}(E)))$, d'après le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki. Si $M(\Omega)$, l'espace vectoriel formé des mesures de Radon sur Ω, est muni de la topologie $^*faible$ $\sigma(M(\Omega), C_0(\Omega))$, alors l'ensemble $M_1(\Omega)$ est compact pour cette topologie. Soit f une fonction de $K_\delta^\#(G)$. On a

$$\begin{aligned}\int_G f(x)T(\mu)(x^{-1})dx &= \int_G \int_\Omega w(x^{-1})f(x)d\mu(\omega)dx \\ &= \int_\Omega \mathcal{F}f(w)d\mu(\omega).\end{aligned}$$

D'où

$$f * T(\mu)(e) = \mu(\mathcal{F}(f)).$$

On a $\lim\limits_{\mu \to 0} f * T(\mu)(e) = 0$. D'où T est continue pour les topologies *-faibles. L'espace $P_{1,\delta}(G, End_{\mathbb{C}}(E))$ est convexe et compact pour la topologie *-faible, d'après le théorème de Milman-Krein, $P_{1,\delta}(G, End_{\mathbb{C}}(E))$ est égal à l'enveloppe convexe de ses points extremaux. L'enveloppe convexe des points extremaux de $P_{1,\delta}(G, End_{\mathbb{C}}(E))$ est le plus petit fermé convexe contenant $ext(P_{1,\delta}(G, End_{\mathbb{C}}(E)))$.

L'espace $T(M_1(\Omega))$ étant convexe et compact pour la topologie *-faible, $\sigma(L_\rho^\infty(G, End_{\mathbb{C}}(E)), L_\rho^1(G, End_{\mathbb{C}}(E)))$ donc $ext(P_{1,\delta}(G, End_{\mathbb{C}}(E)))$ est un sous-espace fermé de $T(M_1(\Omega))$. D'où

$$T(M_1(\Omega)) = P_{1,\delta}(G, End_{\mathbb{C}}(E)),$$

Par conséquent T est surjective. $\square$

Chapitre 3

Théorème de Paley-Wiener

Dans ce chapitre, nous présenterons les théorèmes de Paley-Wiener classiques, la formulation dans le cas réel et celle selon Schwartz. Nous exposeron également la formulation de Gangolli pour les fonctions sphériques sur les groupes de Lie semi-simples. Par la suite, Nous donnnerons une autre formulation de ce théorème pour les fonctions sphériques.

3.1 Théorème de Paley-Wiener dans les cas classiques

3.1.1 Le cas classique réel

Théorème 3.1.1. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{C}^+$ à valeurs complexes. Alors $f \in Hol(\mathbb{C}^+)$ et*

$$\sup_{0<y<\infty} \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^2 dx = C < \infty,$$

si et seulement si, il existe $F \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $F \equiv 0$ sur $]-\infty\,;0[$ et

$$f(z) = \int_0^{\infty} F(t) e^{itz} dt \qquad (z \in \mathbb{C}^+) \tag{3.1}$$

Littéralement, le théorème décrit de façon explicite l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{R})$. En effet, il dit que $\mathcal{F}H^2(\mathbb{R}){=}L^2(\mathbb{R}^+)$. Ceci est un résultat très utile car il permet de prendre la transformée de Fourier d'une fonction d'un espace de Hardy et de travailler ensuite dans l'espace très usuel $L^2(\mathbb{R}^+)$ des fonctions de carré intégrable sur les réels positifs.

Démonstration. 1. Supposons que la relation 3.1 est vérifiée. Montrons que f est holomorphe sur $Hol(\mathbb{C}^+)$.
- $\forall z \in Hol(\mathbb{C}^+)$, $t \longrightarrow F(t)e^{itz}$ est mésurable.
- $\forall t \in\,]0\,;+\infty[$, $z \longrightarrow F(t)e^{itz}$ est holomorphe sur $Hol(\mathbb{C}^+)$.
- Soit K un compact de $Hol(\mathbb{C}^+)$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que $\forall z \in K$, $Im(z) > \Delta$. On a alors

$$\forall t \in]0\,;+\infty[,\ \forall z \in K,\ |F(t)e^{itz}| \le \underbrace{|F(t)|}_{\in L^2}\underbrace{e^{-\delta t}}_{\in L^2} \in L^1,$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Donc d'après le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale, f est holomorphe sur $Hol(\mathbb{C}^+)$. Réécrivons maintenant 3.1 sous la forme,

$$f(x+iy) = \int_0^{\infty} F(t)e^{-ty}e^{itx}dt$$

Considérons y comme fixé. On a alors d'après le théorème de Plancherel,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^2 dx &= \int_0^{+\infty} |F(t)|^2 e^{-2ty} dy. \\ &\le \int_0^{+\infty} |F(t)|^2 dt.\end{aligned}$$

Donc, les restrictions de f aux droites horizontales de $Hol(\mathbb{C}^+)$ constituent un sous ensemble borné de $L^2(]-\infty\,;+\infty[)$.

2. Réciproquement La fonction F que nous recherchons doit posséder la propriété suivante : $f(x+iy)$ est la transformée de Fourier de $F(t)e^{yt}$ (où y est considéré comme une constante strictement positive). Si on utilise la formule d'inversion, la fonction F souhaitée devra être de la forme

$$\begin{aligned}F(t) &= e^{ty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+iy)e^{-itx}dx \\ &= e^{ty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{-itz}dx,\end{aligned}$$

où la dernière intégrale est prise sur une droite horizontale de $Hol(\mathbb{C}^+)$. La valeur de cette intégrale ne doit pas dépendre du choix d'une droite particulière, ce qui suggère un appel au théorème de Cauchy.

Soit y fixé tel que $0 < y < \infty$. On va supposer pour simplifier que $y > 1$ (le cas $0 < y < \infty$ étant totalement symétrique). On note $I =]1\,;y[$. Soit également t $\in \mathbb{R}$. Pour tout $\alpha > 0$, on définit Γ_α comme le chemin rectangulaire dont les sommets sont $\pm\alpha + i$ et $\pm\alpha + iy$

D'après le théorème de Cauchy, on a

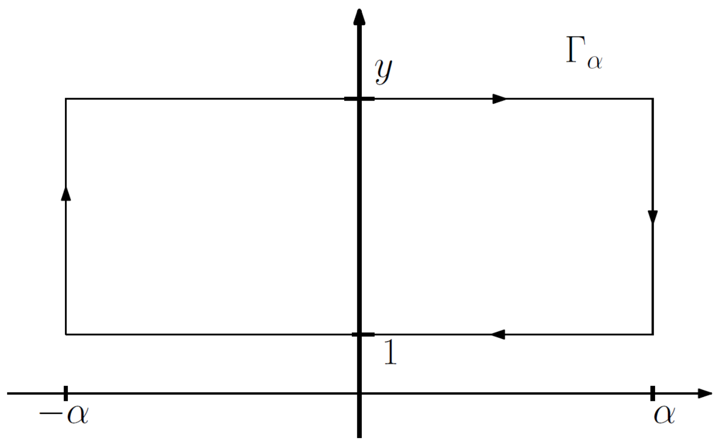

FIGURE 3.1 – Chemin rectangulaire.

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{\Gamma_\alpha} f(z)e^{-itz}dz \\
&= \int_{-\alpha}^{+\alpha} f(x+iy)e^{-it(x+iy)}dx - \int_{-\alpha}^{+\alpha} f(x+i)e^{-it(x+i)}dx. \\
&- \int_I f(\alpha+iu)e^{-it(\alpha+iu)}du + \int_I f(-\alpha+iu)e^{-it(-\alpha+iu)}du.
\end{aligned}
$$

Pour montrer que l'intégrale $\int f(z)e^{-itz}dz$ rencontrée plus tôt, ne dépend pas de la droite sur laquelle on la considère, on va montrer que les deux intégrales sur les segments verticaux tendent vers 0 quand α tend vers l'infini et que les intégrales sur les segments horizontaux sont convergentes quand α tend vers l'infini. Pour cela on introduit

$$\Phi(\alpha) = \int_{[\alpha+i\,;\alpha+iy]} f(z)e^{-itz}dz,$$

qui correspond à l'intégrale sur le segment vertical. Alors,

$$
\begin{aligned}
|\Phi(\alpha)|^2 &= |\int_I f(\alpha+iu)e^{-it(\alpha+iu)}du|^2 \\
&\leq \int_I |f(\alpha+iu)|^2 du \times \int_I e^{2tu}du, \text{ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.}
\end{aligned}
$$

Définissons maintenant

$$\Lambda(\alpha) = \int_I |f(\alpha+iu)|^2 du.$$

À défaut de montrer que $\Lambda(\alpha)$ tend vers 0 quand α tend vers l'infini, on va montrer qu'il existe une suite de points $(\alpha_j)_j \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ tendant vers l'infini, et telle que $(\alpha_j)_j$ tend vers 0. Il suffit pour cela de montrer que Λ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Or, on a

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda(\alpha) d\alpha &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\int_I |f(\alpha+iu)|^2 du) d\alpha \\
&= \int_I (\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\alpha+iu)|^2 d\alpha) du \text{ Par Fubini-Tonelli} \\
&= 2\pi C \lambda(I),
\end{aligned}$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Il existe donc une suite $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telle que $\alpha_j \to +\infty$ et

$$\begin{cases} \lambda(\alpha_j) \to 0 \\ \lambda(-\alpha_j) \to 0. \end{cases}$$

Comme

$$|\Phi(\alpha)|^2 \leq \Lambda(\alpha) \times \int_I e^{2u} du,$$

alors

$$|\Phi(\alpha_j)|^2 \leq \Lambda(\alpha_j) \times \int_I e^{2u} du.$$

D'où

$$\begin{cases} \Phi(\alpha_j) \to 0 \\ \Phi(-\alpha_j) \to 0. \end{cases}$$

On remarque par ailleurs, que ceci a lieu pour tout t et que la suite (α_j) ne dépend pas de t. On va maintenant montrer que les intégrales sur les segments horizontaux sont convergentes. Pour cela on va utiliser le théorème de Plancherel. On pose alors

$$g_j(y,t) = \frac{1}{2\pi} \int_I \int_{-\alpha_j}^{+\alpha_j} f(x+iy) e^{-itx}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{\alpha j}} f(x+iy) e^{-itx} dx \\
&= g_j(y,t) e^{ty} - e^t g_j(1,t) + \frac{1}{2\pi} \underbrace{[\Phi(\alpha_j) + \Phi(-\alpha_j)]}_{\to 0}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{j\to+\infty} \left[g_j(y,t) e^{ty} - e^t g_j(1,t) \right] = 0. \tag{3.2}$$

Et ce pour tout $t \in \mathbb{R}$. Notons $f_y(x)$au lieu de $f(x+iy)$. Par hypothèse,$f_y \in L_2(\mathbb{R})$. Donc, d'après le théorème de Plancherel,

$$\lim_{j\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mid \hat{f}_y(t)-g_j(y,t)\mid^2 dt=0.$$

Donc, il existe une sous-suite de $(g_j(y,t))_{j\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\hat{f}_y(t)$ pour presque tout t. On pose

$$F(t)=e^t\hat{f}_1(t).$$

Il reste à vérifier que

$$\begin{cases} F\equiv 0 \quad sur \quad]-\infty\,;0[, \\ F\in L^2(\mathbb{R}), \\ F(z)=\displaystyle\int_0^{\infty} F(t)e^{itz}dt. \end{cases}$$

Grâce à (3.2), on a alors pour tout $0<y<\infty$ et pour presque tout t

$$F(t)=e^{yt}\hat{f}_y(t).$$

On applique alors le théorème de Plancherel

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2ty}|F(t)|^2dy &= \int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}_y(t)|^2dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|f_y(x)|^2dx\le C. \end{aligned}$$

Si on fait tendre y vers $+\infty$ dans la relation ci-dessus, on a grâce au lemme de Fatou, $F(t)=0$ presque partout sur $]-\infty\,;0[$. Par ailleurs, si on fait tendre y vers 0, on obtient grâce au théorème de convergence monotone

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}|F(t)|^2dt\le C.$$

Enfin

$$\hat{f}_y : t\longmapsto \hat{f}_y(t)=\underbrace{e^{-ty}}_{\in L^2}\underbrace{F(t)}_{\in L^2}\in L^1.$$

Donc $\hat{f}_y\in L^1$. Comme $\hat{f}_y\in L^2$, on peut appliquer le théorème d'inversion

$$f_y(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}_y(t)e^{itx}dt,$$

ou encore

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \int_0^{+\infty} F(t)e^{-yt}e^{itx}dt \\
&= \int_0^{+\infty} F(t)e^{itz}dt.
\end{aligned}
$$

□

3.1.2 Théorème de Paley-Wiener selon Schwartz

Théorème 3.1.2. *Soit $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec supp$(\phi) \subset \{|z| \leq a\}$. Alors il existe des constantes C_n telles que*

$$
|\hat{\phi}(\zeta)| \leq C_n(1+|\zeta|^2)^{-n/2}e^{a|Im\zeta|}, \quad (\zeta \in \mathbb{C}^d). \tag{3.3}
$$

Réciproquement si f est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^d$ telle que $|f(\zeta)|$ satisfait (3.3) alors $f = \hat{\phi}$ où $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ et supp$(\phi) \subset \{|z| \leq a\}$.

Démonstration. Soit $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec supp$(\phi) \subset \{ \mod x \mod \leq a\}$. En intégrant par parties α fois, on obtient $\forall \zeta \in \mathbb{C}^d$

$$
\zeta^\alpha \hat{\phi}(\zeta) = \int D^\alpha \phi(x)e^{-ix\zeta}dx.
$$

Donc

$$
|\zeta^\alpha \hat{\phi}(\zeta)| \leq (\int |D^\alpha \phi|).e^{a|Im\zeta|}.
$$

Ainsi

$$
(1+|\zeta|^2)^n|\hat{\phi}(\zeta)|^2 \leq n! \sum_{|\alpha|\leq n} (\int |\zeta^\alpha|^2).|\hat{\phi}(\zeta)|^2 \leq C_n^2 e^{2a|Im\zeta|}.
$$

D'ou le résultat en prenant les racines carrées. Réciproquement soit f une fonction holomorphe qui satisfait (3.3). Définissons $\phi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ par

$$
\phi(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(\zeta)e^{-ix\zeta}d\zeta|.
$$

En appliquant (3.3) avec $\zeta \in \mathbb{R}^d$, nous avons $(1+|\zeta|^2)^n|f(\zeta)|^2 \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\forall n$. La fonction ϕ est donc bien définie. Ainsi, nous pouvons la dériver sous le signe intégral un nombre arbitraire de fois pour déduire que $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Maintenant montrons que supp$(\phi) \subset \{|x| \leq a\}$. En appliquant le théorème de Cauchy d fois,

$$
\phi(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(\zeta + i\eta)e^{-ix(\zeta+i\eta)}|d\zeta, \ (x, \eta \in \mathbb{R}^d).
$$

En particulier, en prenant $\eta = \frac{tx}{|x|}$, $t > 0$ et en appliquant (3.3) avec $n > d$, nous avons

$$\phi(x) \leq (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} C_n(1 + |\zeta|^2)^{-n/2} d\zeta . e^{t.(a-|x|)}, \ (x \in \mathbb{R}^d, t > 0).$$

En laissant $t \longrightarrow \infty$, nous découvrons que $\phi(x) = 0, \forall |x| > a$, comme voulu. Finalement le théorème d'inversion montre que $\hat{\phi} = f$ sur $\mathbb{R}^d$ et donc aussi sur $\mathbb{C}^d$ par le principe d'identité appliqué d fois. $\square$

Laurent Schwartz a généralisé ce théorème pour donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une distribution soit à support compact. Une très jolie application de ce théorème est la preuve du fait que la solution de l'équation des ondes est à support dans le cône d'onde d'avenir $\{t \geq 0, ||x|| \leq t\}$.

3.2 Théorème de Gangolli sur les groupes de Lie semi-simples

Soient G un groupe de Lie connexe semi-simple de centre fini, $G = KA_pN^+$ la décomposition d'Iwasawa de G, avec K, sous-groupe compact de G. On note $K^{\#}(G)$ l'algèbre de convolution des fonctions complexes continues à support compact et biinvariantes par le sous-groupe compact K de G.

Soient $N_K(A_p)$ et $Z_K(A_p)$, respectivement le normalisateur et le centralisateur de A_p dans K. Alors Le groupe de Weyl W de la paire (G, A_p) est identifié au quotient $N_K(A_p)/Z_K(A_p)$. On dit qu'une fonction f est $W-invariante$ si, $\forall w \in W$, $w.f(x) = f(w^{-1}x)$.

Théorème de Gangolli

Soit G un groupe de Lie connexe semi-simple de centre fini, $G = KA_pN^+$ la décomposition d'Iwasawa de G, avec K, sous-groupe compact de G. Soient $K^{\#}(G)$, l'algèbre de convolution des fonctions biinvariantes par K et $\mathfrak{F}$ le dual réel de $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$, l'algèbre de Lie du groupe A_p. Nous désignerons par $\mathfrak{F}_c$ la complexifiée de $\mathfrak{F}$. Pour toute fonction $f \in K^{\#}(G)$ de support contenu dans la boule de rayon R dans A_p, la transformée de Fourier-Laplace sphérique définie par

$$\hat{f}(v) = \int_G f(x)\phi_v(x)\, d_G(x),$$

existe bien pour tout $v = \xi + i\eta \in \mathfrak{F}_c$ et est une fonction W-invariante entière holomorphe de v $(v \in \mathfrak{F}_c)$. De plus étant donné un entier $N \geq 0$, il existe une constante $C_N > 0$ telle que

$$|\ \hat{f}(\xi + i\eta)\ | \leq C_N(1 + ||\xi + i\eta||)^{-N} e^{R||\eta||} \qquad (\xi, \eta \in \mathfrak{F}).$$

Inversement, si F est une fonction W-invariante entière holomorphe sur $\mathfrak{F}_c$ et s'il existe $R > 0$, tel que pour tout entier $N > 0$, il existe une constante $C_N > 0$ vérifiant

$$| F(\xi + i\eta) | \leq C_N(1 + ||\xi + i\eta||)^{-N} e^{R||\eta||} \quad (\xi, \eta \in \mathfrak{F}),$$

alors il existe une unique fonction $f \in K^{\#}(G)$ telle que $\hat{f} = F$. f s'annule en dehors de la boule de rayon R dans A_p et est donnée par la formule suivante

$$f(x) = [W]^{-1} \int_{\mathfrak{F}} F(v)\overline{\phi_v(x)}|c(v)|^{-2}\, d_{\mathfrak{F}}(v) \quad (x \in G),$$

où $c(v)$ désigne la fonction de Harish-Chandra.

Démonstration. La preuve se trouve dans le Tome 2 du livre de Gath Warner (17).
Cette preuve fait référence notammnent à la notion de transformation d'Abel d'une fonction sphérique. Pour rappel, si ϕ désigne une fonction continue biinvariante par K. On appelle transformation d'Abel de ϕ, la fonction F_ϕ définie par

$$F_\phi(h) = h^\rho \int_{N^+} \phi(hn)\, d_{N^+}(n) \qquad (h \in A_p).$$

□

3.3 Une autre formulation du Théorème de Paley-Wiener pour les fonctions sphériques

Soient G un groupe de Lie semi-simple de centre fini, $G = KAN$ la décomposition d'Iwasawa de G, avec K, sous-groupe compact de G et . Soit f une fonction définie sur G biinvariante par K de classe C^{2m}, et à support compact.
$\widehat{\Delta^m f(s)} = (s^2 - \rho^2)^m \hat{f}(s)$. Par suite il existe une constante C telle que $-\rho \leq Re\, s \leq \rho$.

$$| \hat{f}(s) | \leq C(1+ | s |^2)^{-m}.$$

Si le support de f est contenu dans la boule de centre P_0 de rayon R

$$\forall s \in \mathbb{C}, | \hat{f}(s) | \leq C(1+ | s |^2)^{-m} e^{|\sigma| R},$$

où σ est la partie réelle de s.
À partir de l'expression de la fonction c de Harish Chandra (9), nous déduisons à l'aide de la formule de Stirling, qu'il existe une constante γ telle que, pour $Re\, s \geq 0$

$$\tfrac{1}{|c(s)|} \leq \gamma(1+ \mid s \mid^2)^{\frac{d_n - 1}{4}},$$

où d_n désigne la mesure sur N qui est l'image par l'application exponentielle de la mesure de Lebesgue. C'est une mesure de Haar sur N. Si f est de classe C^{2m} avec $2m > \frac{d_n}{2}$ et à support compact

$$\int_0^\infty \mid \hat{f}(i\nu) \mid \frac{d\nu}{\mid c(i\nu) \mid^2} < \infty.$$

En effet, d'après l'inégalité de Schwartz,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mid \hat{f}(i\nu) \mid \frac{d\nu}{\mid c(i\nu) \mid^2} \quad &\leq \quad \int_0^\infty (\rho^2 + \nu^2)^{2m} \mid \hat{f}(i\nu) \mid^2 \frac{d\nu}{\mid c(i\nu) \mid^2} \\ &\times \quad \int_0^\infty (\rho^2 + \nu^2)^{-2m} \frac{d\nu}{\mid c(i\nu) \mid^2}, \end{aligned}$$

et d'après la formule de Plancherel

$$\int_0^\infty (\rho^2 + \nu^2)^{2m} \mid \hat{f}(i\nu) \mid^2 \frac{d\nu}{\mid c(i\nu) \mid^2} = 2\pi K \int \mid \Delta^m f(x) \mid^2 dx.$$

Et La formule d'inversion s'applique pour une telle fonction

$$\forall x \in G, f(x) = \tfrac{1}{2\pi K} \int_0^\infty \hat{f}(i\nu)\phi_{i\nu}(x) \frac{d\nu}{\mid c(i\nu) \mid^2}.$$

Une autre formulation du théorème de Paley-Wiener pour les fonctions sphériques

Théorème 3.3.1. ***Théorème de Paley-Wiener.*** *Soit F(s) une fonction entière de s, telle que*

1. $\displaystyle\int_0^\infty \mid F(i\nu) \mid^2 \frac{d\nu}{\mid c(i\nu) \mid^2} < \infty,$
2. *Il existe $R > 0$ et $c > 0$ tels que*
$$\mid F(s) \mid \leq C e^{|\sigma| R},$$

où σ est la partie réelle de s.
Alors $F = \hat{f}$ où f est une fonction de support contenu dans la boule $B(P_0, R)$ de centre P_0 et de rayon R

Démonstration. a. Supposons qu'il existe $N > \frac{d_n+1}{4}$ tel que

$$| F(s) | \leq C(1+ | s |^2)^{-N} e^{|\sigma| R}.$$

Et posons

$$f(x) = \tfrac{1}{2\pi K} \int_0^\infty F(i\nu)\phi_{i\nu}(x) \frac{d\nu}{| c(i\nu) |^2}.$$

La fonction f est continue. Nous allons montrer que $f(a_t) = 0$ si $t > R$. Pour tout $t > 0$,

$$\phi(t,s) = c(s)\psi(t,s) + c(-s)\psi(t,-s).$$

Nous obtenons

$$f(a_t) = \tfrac{1}{2\pi K} \int_0^\infty F(i\nu)\psi(t,-i\nu)(x) \frac{d\nu}{| c(i\nu) |}.$$

Etant donné $\tau > 0$ il existe $C_1 > 0$ tel que pour $\sigma \geq 0$, $t \geq \tau$,

$$| \psi(t, -\sigma - i\nu) | \leq C_1 e^{-(\sigma+\rho)t}$$

Nous avons de plus

$$\begin{gathered} | F(\sigma + i\nu) | \leq C(1 + \sigma^2 + \nu^2)^{-N} e^{R\sigma} \\ \frac{1}{| c(\sigma + i\nu) |} \leq \gamma (1 + \sigma^2 + \nu^2)^{\frac{d_n - 1}{4}}. \end{gathered}$$

D'après la formule de Cauchy appliquée au contour suivant L

$$\int_L F(s)\psi(t,-s) \frac{ds}{c(s)} = 0.$$

et en faisant tendre β vers l'infini nous obtenons pour tout $\sigma > 0$

$$f(a_t) = \tfrac{1}{2\pi K} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma + i\nu)\psi(t, -\sigma - i\nu) \frac{d\nu}{c(\sigma + i\nu)},$$

et en majorant

$$\begin{aligned} | f(a_t) | &\leq C_2 e^{-\rho t} e^{(R-t)\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \sigma^2 + \nu^2)^{\frac{d_n - 1}{4} - N} \, d\nu \\ &\leq C_3 e^{-\rho t} e^{(R-t)\sigma}. \end{aligned}$$

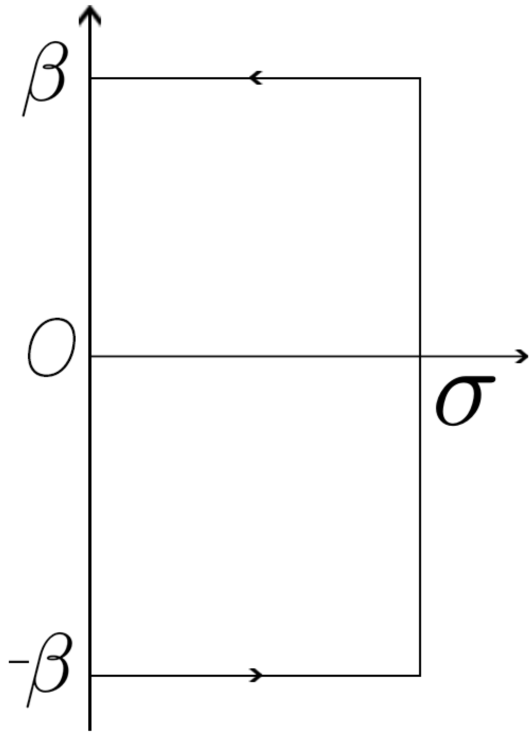

FIGURE 3.2 – Contour L

Si $t > R$, $\lim_{\sigma\to\infty} e^{(R-t)\sigma} = 0$, donc $f(a_t) = 0$.
On vérifie à l'aide de la formule de Plancherel que $\hat{f} = F$.

b. Réciproquement, soit F une fonction entière de s, paire, vérifiant (1) et (2), il existe une fonction f de $L^2(G)^{\#}$ dont la transformée de Fourier-Plancherel est $\hat{f}(i\nu) = F(i\nu)$. Pour tout $\epsilon > 0$, considérons une fonction g_ϵ de classe C^∞ biinvariante par K, de support dans la boule $B(P_0, \epsilon)$, positive. La transformée de Fourier-Plancherel de $f * g_\epsilon$ est égale à

$$F(i\nu)\hat{g}_\epsilon(i\nu) = F_\epsilon(i\nu).$$

La fonction F_ϵ se prolonge à C en une fonction entière

$$F_\epsilon(s) = F(s)\hat{g}_\epsilon(s).$$

Puisque la fonction g_ϵ est de classe C^∞ et que son support est contenu dans la boule de centre P_0 et de rayon ϵ, pour tout $N > 0$, il existe C_N tel que

$$\hat{g}_\epsilon(\xi + i\nu) \leq C_N(1 + \sigma^2 + \nu^2)^{-N} e^{\epsilon|\sigma|}.$$

Si nous choisissons $N > \frac{d_n+1}{4}$, la fonction F_ϵ vérifie l'hypothèse du a. Par suite $f * g_\epsilon$ a son support dans la boule de centre P_0 et de rayon $R+\epsilon$. Puisque

$$\lim_{\epsilon\to 0} f * g_\epsilon = f$$

la convergence ayant lieu dans L^2, la fonction f a son support dans la boule de centre P_0 et de rayon R. □

Corollaire 3.3.2. *a. Soit f une fonction de $K^{\#}(G)$, à support dans la boule de centre P_0 et de rayon R, alors, pour tout entier $N \geq 0$ il existe une constante C_N telle que*

$$\mid \hat{f}(s) \mid \leq C_N(1+\mid s \mid)^{-N} e^{R|\sigma|},$$

où σ désigne la partie réelle de s.
b. Réciproquement, si F est une fonction entière paire vérifiant

$$\forall N \geq 0, \exists C_N, \mid F(s) \mid \leq C_N(1+\mid s \mid)^{-N} e^{R|\sigma|}.$$

Alors $F = \hat{f}$, où f est une fonction de $K_\delta^{\#}(G)$ dont le support est contenu dans la boule de centre P_0 et de rayon R.

Démonstration. La partie a) de l'énoncé a déjà été démontrée. Pour prouver b) il reste à démontrer que la fonction f définie par

$$f(t) = \frac{1}{2\pi K}\int_0^\infty F(i\nu)\phi(t,i\nu)\frac{d\nu}{\mid c(i\nu)\mid^2},$$

est de classe C^∞. En effet, en dérivant sous le signe intégral, on a

$$f^{(m)}(t) = \frac{1}{2\pi K}\int_0^\infty F(i\nu)(\frac{d}{dt})^m\phi(t,i\nu)\frac{d\nu}{\mid c(i\nu)\mid^2}.$$

□

3.4 Une transformation d'Abel pour les fonctions sphériques de type δ

Dans cette section, nous commencerons par donner, à partir de résultats existants dans le cas sphérique, une définition et quelques propriétés de la transformée d'Abel sur $K_\delta^{\#}(G)$.

Définition 3.4.1. *Soient G un groupe de Lie connexe semi-simple de centre fini, $G = KA_pN^+$, la décomposition d'Iwasawa de G, avec K le sous-groupe maximal compact de G. Normalisons la mesure de Haar*

$$d_G(x) = h^{2\rho} dk d_{A_p}(h) d_{N^+}(n) \quad (x \in G),$$

avec $x = khn$ et ρ désigne la demi-somme des racines. Soient $\delta \in \hat{K}$ et $\mu_{\check{\delta}}$ une représentation unitaire irréductible de K dans l'espace de Hilbert $E_{\check{\delta}}$. Pour f fixé dans $K_\delta^{\#}(G)$, considérons l'intégrale définie par

$$F_f^\delta(h) = h^\rho \int_K \int_{N^+} f(khn) \mu_{\check{\delta}}(k^{-1}) d_{N^+}(n)\, dk \quad (h \in A_p).$$

*Nous désignerons par transformée d'Abel de type δ, l'application de $f \mapsto F_f^\delta(h)$. Par la **Proposition 1.3.3**, nous savons que $K_\delta^{\#}(G)$ est isomorphe à $U_{c,\delta}(G)$ par l'application $f \mapsto \psi_f^\delta$ définie par $\psi_f^\delta(x) = \displaystyle\int_K \mu_{\check{\delta}}(k^{-1}) f(kx)\, d_K(k)$. Ainsi, pour f fixé dans $K_\delta^{\#}(G)$, on obtient après calcul que*

$$F_f^\delta(h) = h^\rho \int_{N^+} \psi_f^\delta(hn)\, d_{N^+}(n), \quad (h \in A_p).$$

On arrive aussi à montrer que la transformation d'Abel est linéaire et est un isomorphisme (injectif et surjectif) de l'algèbre $K_\delta^{\#}(G)$ vers une certaine sous-algèbre de $C_c(A_p, Hom_C(E_{\check{\delta}}, E_{\check{\delta}}))$ qui est $K_\delta^{\#}(A_p)$.

Remarque 3.4.2. *Soient $v \in \mathfrak{F}_c$ et ϕ_v une fonction sphérique sur G. Par calcul, on montre que*

$$\int_G f(x)\phi_v(x) d_G(x) = \int_{A_p} F_f(h) h^{iv}\, d_{A_p}(h), \quad (f \in K_\delta^{\#}(G)). \tag{3.4}$$

Soit $\mathcal{M}$ le centralisateur de A_p dans K, alors pour tout $m \in \mathcal{M}$, nous avons

$$\begin{aligned} F_f^\delta(h) &= h^\rho \int_K \int_{N^+} f((mkm^{-1})hn) \mu_{\check{\delta}}(mk^{-1}m^{-1}) d_{N^+}(n)\, dk \\ &= h^\rho \int_K \int_{N^+} f((mkm^{-1})hn) \mu_{\check{\delta}}(mk^{-1}m^{-1}) d_{N^+}(n)\, dk, \end{aligned}$$

avec $h \in A_p$ et $f \in K_\delta^{\#}(G)$. Il suffira donc de calculer de façon explicite $\displaystyle\int_{\mathcal{M}} \mu_{\check{\delta}}(mk^{-1}m^{-1})\, dk$. Ainsi, l'on arrive à établir le résultat suivant qui donne une formule explicite de $F_f^\delta(h)$. Par suite, si $f \in K_\delta^{\#}(G)$, $\sigma \in \hat{\mathcal{M}}$ et si nous supposons que σ est contenu b fois dans δ, $b > 1$, d le dégré de δ, on obtient que le (ij)^{eme} terme matriciel de $F_f^\delta(h)$ est donné par la formule

$$(F_f^\delta(h))_{ij} = d(\sigma_{u_i})^{-1} \epsilon_{u_i.u_j} \delta_{v_i.v_j}\ h^\rho \int_K \int_{N^+} f((khn) tr(I_{u_i.u_j}) \mu_\delta(k)\, d_{N^+}(n) dk.$$

Proposition 3.4.3. *La transformée d'Abel généralisée nous permet de déterminer la forme explicite d'une fonction sphétique de type δ grâce à une relation du type (3.4). En effet, on a*

$$\int_G f(x)\phi_{v,\delta}(x)d_G(x) = \int_{A_p} F_f^{\delta}(h)e^{iv(h)}\, d_{A_p}(h), \quad (f \in K_\delta^{\#}(G)).$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\int_G f(x)\phi_{v,\delta}(x)d_G(x) &= \int_K\int_{A_p}\int_{N^+} f(khn)\phi_{v,\delta}(khn)h^{2\rho}dkdhdn\\ &= \int_{A_p}\int_{N^+} f(hn)\phi_{v,\delta}(hn)h^{2\rho}dhdn.\end{aligned}$$

Or l'algèbre $K_\delta^\sharp(G)$ est isomorphe à l'algèbre $U_{c,\delta}(G)$ des fonctions continues à support compact ψ de G dans $Hom_C(E_\delta, E_\delta)$ et qui sont $\mu-$sphériques sur G. Ainsi, pour toute fonction $\phi \in K_\delta^\sharp(G)$, $\psi_\phi^\delta(x) = \int_K u_{\check{\delta}}(k^{-1})\phi(kx)dk$. On a donc

$$\begin{aligned}\int_G f(x)\phi_{v,\delta}(x)d_G(x) &= \int_{A_p}\int_{N^+} f(hn)\psi_\phi^\delta(hn)h^{2\rho}dhdn\\ &= \int_{A_p}\int_{N^+} f(hn)\psi_\phi^\delta(hn)h^{2\rho}dkdhdn\\ &= \int_{A_p}\int_{N^+} f(hn)(\int_K u_{\check{\delta}}(k^{-1})\phi(khn)dk)h^{2\rho}dhdn\\ &= \int_{A_p}\int_{N^+}\int_K f(khn)u_{\check{\delta}}(k^{-1})\phi(khn)h^{2\rho}dkdhdn.\end{aligned}$$

Or $\phi(x) = \int_K e^{(iv-\rho)H(xk)}dk$, donc

$$\begin{aligned}\int_G f(x)\phi_{v,\delta}(x)d_G(x) &= \int_{A_p}\int_{N^+}\int_K f(khn)u_{\check{\delta}}(k^{-1})e^{(iv-\rho)H(xk)}h^{2\rho}dkdhdn\\ &= \int_{A_p}\int_{N^+}\int_K f(khn)u_{\check{\delta}}(k^{-1})e^{iv(h)}e^{-\rho(h)}h^{2\rho}dkdhdn\\ &= \int_{A_p}\int_{N^+}\int_K f(khn)u_{\check{\delta}}(k^{-1})e^{iv(h)}h^{-\rho}h^{2\rho}dkdhdn\\ &= h^\rho\int_{A_p}\int_{N^+}\int_K e^{iv(h)}f(khn)u_{\check{\delta}}(k^{-1})dkdhdn.\end{aligned}$$

Or $\psi_f^\delta(hn) = \int_K u_{\check{\delta}}(k^{-1})f(khn)dk$. On a donc

$$\begin{aligned}\int_G f(x)\phi_{v,\delta}(x)d_G(x) &= h^\rho\int_{A_p}\int_{N^+} e^{iv(h)}\psi_f^\delta(hn)dhdn\\ &= \int_{A_p} e^{iv(h)}F_f^\delta(h)dh\\ &= \hat{F}_f^\delta(h).\end{aligned}$$

$\square$

Chapitre 4

Extensions du théorème de Paley-Wiener

Dans ce chapitre, nous présenterons un théorème de Paley-Wiener généralisé aux fonctions sphériques suivant une classe δ de représentations irréductibles. Nous exposerons aussi une application au groupe de Poincaré en physique des particules.

4.1 Théorème de Paley-Wiener généralisé aux fonctions sphériques de type δ

Théorème 4.1.1. *Soit G un groupe de Lie connexe semi-simple de centre fini, $G = KA_pN^+$ la décomposition d'Iwasawa de G, K un sous-groupe compact de G et $K_\delta^\sharp(G)$ défini comme plus haut. Pour toute fonction $f \in K_\delta^\sharp(G)$ de support contenu dans la boule de rayon R dans A_p, La transformée de Fourier-Laplace sphérique de type δ donnée par*

$$\hat{f}_\delta(v) = \int_G f(x)\phi_{v,\delta}(x)d_G(x),$$

existe pour tout $v = \xi + i\eta \in \mathfrak{F}_c$ et est une fonction W-invariante entière holomorphe de v ($v \in \mathfrak{F}_c$). De plus étant donné un entier $N \geq 0$, il existe une constante $C_{N,\delta} > 0$ telle que

$$\mid \hat{f}_\delta(\xi + i\eta) \mid \leq C_{N,\delta}(1 + ||\xi + i\eta||)^{-N} e^{R||\eta||},\ \xi, \eta \in \mathfrak{F}.$$

Inversement si F est une fonction W-invariante entière holomorphe sur $\mathfrak{F}_c$ avec la propriété qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout entier $N > 0$ il existe une constante $C_N > 0$ telle que

$$\mid F(\xi + i\eta) \mid \leq C_N(1 + ||\xi + i\eta||)^{-N} e^{R||\eta||}\ \ \xi, \eta \in \mathfrak{F}.$$

Alors il existe une unique fonction $f \in K_{\delta}^{\sharp}(G)$ telle que $\hat{f} = F$. f s'annule en dehors de la boule de rayon R dans A_p et est donnée par la formule suivante

$$f(x) = [W]^{-1} \int_{\mathfrak{F}} F(v)\overline{\phi_{v,\delta}(x)}|c(v)|^{-2} d_{\mathfrak{F}}(v),\ x \in G,$$

où $c(v)$ désigne la constante de Harish-Chandra, $\mathfrak{F}_c$ désigne la complexifiée de $\mathfrak{F}$, et $\mathfrak{F}$ le dual réel de $\mathfrak{A}$ (L'algèbre de Lie de A_p dans la décomposition d'Iwasawa de G).

Démonstration. (1) Soit $f \in K_{\delta}^{\sharp}(G)$ qui s'annule en dehors de la boule de rayon R dans A_p. La transformée de Fourier-Laplace sphérique de type δ donne

$$\hat{f}_{\delta}(v) = \int_G f(x)\phi_{v,\delta}(x) d_G(x),$$

existe bien pour tout $v = \xi + i\eta \in \mathfrak{F}_c$ et est une fonction W-invariante entière holomorphe de v ($v \in \mathfrak{F}_c$). Par Le théorème de Paley-Wiener classique nous pouvons affirmer que la transformée de Fourier euclidienne $\hat{F_f^{\delta}}$ de F_f^{δ} est Holomorphe sur $\mathfrak{F}_c$ et étant donné un entier $N \geq 0$, il existe une constante $C_{N,\delta} > 0$ telle que

$$\mid \hat{F_f^{\delta}}(\xi + i\eta) \mid \leq C_{N,\delta}(1 + ||\xi + i\eta||)^{-N} e^{R||\eta||},\ \xi, \eta \in \mathfrak{F}.$$

Comme $\hat{F_f^{\delta}} = \hat{f}_{\delta}$ d'après la proposition 3.4.3, alors nous avons le résultat.

(2) Soit F une fonction W-invariante entière holomorphe sur $\mathfrak{F}_c$ avec la propriété qu'il existe $R > 0$ telle qu'il existe $C_{N,\delta} > 0$ vérifiant

$$\mid F(\xi + i\eta) \mid \leq C_{N,\delta}(1 + ||\xi + i\eta||)^{-N} e^{R||\eta||},\ \xi, \eta \in \mathfrak{F}$$

Définissons une fonction $f \in G$ par

$$f(x) = [W]^{-1} \int_{\mathfrak{F}} F(v)\overline{\phi_{v,\delta}(x)}|c(v)|^{-2} d_{\mathfrak{F}}(v),\ x \in G.$$

La fonction f appartient à $K_{\delta}^{\sharp}(G)$ et s'annule en dehors de la boule de rayon R dans A_p. En effet

$$f(kxk') = [W]^{-1} \int_{\mathfrak{F}} F(v)\overline{\phi_{v,\delta}(kxk')}|c(v)|^{-2} d_{\mathfrak{F}}(v),\ x \in G.$$

Or $\phi_{v,\delta}$ est une fonction dans $K_{\delta}^{\sharp}(G)$, ainsi

$$\phi_{v,\delta}(kxk') = \mu_{\check{\delta}}(k)\psi_f^{\delta}(x)\mu_{\check{\delta}}(k').$$

On remarque également par continuité analytique, au vu de la formule explicite de f que $\hat{f} = F$ sur $\mathfrak{F}_c$.

Il ne reste plus qu'à montrer que le choix de f est unique. En effet Supposons g une fonction vérifiant les hypothèses ci-haut mentionnées. Alors

$$\hat{f} = \hat{g} \Rightarrow \hat{F_f^{\delta}} = \hat{F_g^{\delta}} \Rightarrow F_f^{\delta} = F_g^{\delta} \Rightarrow f = g.$$

Car la transformée d'Abel réalise une bijection de $K_{\delta}^{\sharp}(G)$ vers $K_{\delta}^{\sharp}(A_p)$.

□

4.2 Application au groupe de Poincaré

Dans cette section, nous construirons, à partir du groupe de Poincaré, un groupe de Lie G connexe semi-simple, et son espace $K_{\delta}^{\sharp}(G)$ associé où δ désignera une représentation bien choisie. Nous donnerons aussi une expression générale de la transformée de Fourier-Laplace sphérique de type delta pour une fonction prise arbitrairement dans $K_{\delta}^{\sharp}(G)$. Nous déduirons pour terminer, par le théorème de Paley-Wiener, une condition nécéssaire d'existence de cette transformée de Fourier.

4.2.1 Généralités sur le Groupe de Lorentz

Nous désignerons par M, l'espace-temps de Minkowski de dimension 4, et par g le tenseur métrique associé à M. Soit $g_{\mu\nu}$ la matrice diagonale associée à g. Soient $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ les éléments diagonaux de cette matrices. Ces éléments vérifient

$$g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = g_{33} = 1.$$

Soient $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, $y = (y^0, y^1, y^2, y^3)$ pris dans M. On définit sur M, le produit ci-après

$$x.y = x^0.y^0 - x^1.y^1 - x^2.y^2 - x^3.y^3.$$

Ce produit est une forme bilinéaire, symétrique et non dégénéré. La matrice qui y est associée, que noterons g (relativement au tenseur métrique de M) est donnée par

$$\mathrm{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, en écriture matricielle, le produit devient $x.y = {}^t x.g.y$

L'espace de Minkowski est aussi doté d'une distance particulière $\Delta s(\, ; \,)$ appelée pseudo-métrique, définie dans $\mathbb{R}^4$ par $(\Delta_{s(A;B)})^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$. L'ensemble des transformations affines de l'espace de Minkowski qui laissent invariante la pseudo-métrique forme un groupe nommé groupe de Poincaré dont les transformations de Lorentz forment un sous-groupe.
On appelle groupe de Lorentz, le groupe constitué par l'ensemble des transformations de Lorentz c'est à dire des transformations linéaires L de M dans M qui laissent invariants le produit énoncé plus haut, i.e.

$$(Lx).(Ly) \quad = \quad xy \, . \tag{4.1}$$

On déduit de (4.1) que

$$\sum_{\alpha} L^{\alpha}_{\mu}.L_{\alpha\nu} = g_{\mu\nu} \text{ ou } L^T g L = g, \tag{4.2}$$

où

$$L_{\alpha\nu} = \sum_{\beta} g_{\alpha\beta} L^{\beta}_{\nu} = (gL)_{\alpha\nu} \text{ et } (L^T)^{\alpha}_{\mu} = L^{\alpha}_{\mu} \, . \tag{4.3}$$

Nous déduisons de (4.3) que

$$L^T = gL^{-1}g \text{ ou } (L^T)^{\alpha}_{\mu} = \sum_{\rho}\sum_{\tau} g_{\mu\tau}(L^{-1})^{\tau}_{\rho} g^{\rho\alpha} = (L^{-1})^{\alpha}_{\mu} \, . \tag{4.4}$$

La relation (4.2) implique aussi que $\det L = \pm 1$. En outre, pour $\mu = 0$ et $\nu = 0$ à partir de la relation (4.2), nous avons

$$(L^0_0)^2 - \textstyle\sum_{k=1}^{3} (L^k_0)^2 = 1.$$

Ainsi, $\mid L^0_0 \mid \geq 1$. Par conséquent, $\det L$ et $\operatorname{sign} L^0_0$ sont des fonctions continues des variables L^{ν}_{μ}. Elles doivent donc être constantes sur chaque composante du groupe de Lorentz. Ainsi, chaque transformation de Lorentz se retrouvera dans l'un des quatre groupes suivants

- $L^{\uparrow}_{+}$: $\det L = +1$, $\operatorname{sign} L^0_0 = +1$,
- $L^{\uparrow}_{-}$: $\det L = -1$, $\operatorname{sign} L^0_0 = +1$,
- $L^{\downarrow}_{+}$: $\det L = +1$, $\operatorname{sign} L^0_0 = -1$,
- $L^{\downarrow}_{-}$: $\det L = -1$, $\operatorname{sign} L^0_0 = -1$.

Les transformations $L \in L^{\uparrow}_{+}$ forment un sous-groupe du groupe de Lorentz appelé Le groupe de Lorentz propre et orthochrone. C'est la composante connexe de l'identité (Il s'agit de toutes les transformations de Lorentz qui peuvent être continument obtenues à partir de l'identité).

C'est aussi un sous-groupe du groupe orthogonal $O(1,3)$ qui réunit tous les automorphismes orthogonaux (applications linéaires bijectives) de l'espace vectoriel sous-jacent à l'espace de Minkowski.

Nous Établirons maintenant un lien entre $L_+^\uparrow$ et le groupe $SL(2,\mathbb{C})$.

Proposition 4.2.1. *Soit $\widetilde{L_+^\uparrow}$ le revêtement de $L_+^\uparrow$ alors*

$$\widetilde{L_+^\uparrow} = SL(2,\mathbb{C}).$$

Afin de démontrer notre résultat, considérons le lemme suivant

Lemme 4.2.2. *Soit $H_2(\mathbb{C})$ l'espace des matrices hermitiennes d'ordre 2.*

$$M \simeq H_2(\mathbb{C}).$$

Démonstration du Lemme 4.2.2. Soit $\sigma = \{\sigma^\mu\}$ l'espace des quatres matrices hermitiennes de la forme

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{4.5}$$

Ces matrices sont appelées matrices de Pauli. À tout élément $x = (x^\mu) \in M$, on associe une matrice $X \in H_2(\mathbb{C})$ par la formule suivante

$$X = \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu \sigma_\mu = \begin{bmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{bmatrix}. \tag{4.6}$$

L'application $x \mapsto X$ est linéaire et bijective. En effet, en utilisant la formule

$$Tr(\widetilde{\sigma}^\mu \sigma_\nu) = 2g_\nu^\mu \text{ avec } \widetilde{\sigma}^\mu \equiv \sigma_\mu,$$

on peut associer à toute matrice X de $H_2(\mathbb{C})$ un vecteur de dimension 4

$$x^\mu = \tfrac{1}{2} Tr(X\sigma^\mu),$$

tel que $X = \sum_\mu x^\mu \sigma_\mu$.

En utilisant l'équation (4.6), nous obtenons

$$\det X = \sum_\mu x^\mu x_\mu, \ \frac{1}{2}[\det(X+Y) - \det X - \det Y] = \sum_\mu x^\mu y_\mu. \tag{4.7}$$

□

Maintenant, posons

$$\hat{X} = \Lambda X \Lambda^*, \ \Lambda \in SL(2, \mathbb{C}). \tag{4.8}$$

La matrice $\hat{X}$ est hermitienne. Par conséquent, le vecteur $\hat{x} \in M$.

Revenons maintenant à la preuve de la proposition.

Démonstration de la proposition 4.2.1. Soit $\Lambda \in SL(2, \mathbb{C})$. Considérons tout d'abord l'application réelle linéaire

$$\begin{array}{cccl} L_\Lambda : & M & \longrightarrow & M \\ & X & \longmapsto & L_\Lambda X := \Lambda X \Lambda^* \end{array}$$

L'appplication L_Λ est bien définie grâce au lemme pécédent et grâce à l'égalité (4.8). Toujours par l'égalité (4.8), nous pouvons déduire que $L_{\Lambda_1 \Lambda_2} = L_{\Lambda_1} L_{\Lambda_2}$. De plus, comme $\det \Lambda = 1$, nous obtenons par les égalités (4.6) et (4.8),

$$\hat{x}_\mu \hat{x}_\mu = \det \hat{X} = \det X = \sum_\mu x^\mu x_\mu.$$

Il s'en suit, par (4.7), que les transformations L_Λ conservent le produit sur M et par conséquent, représentent les transformations de Lorentz dans M.

Selon (4.2), $\det \Lambda = \pm 1$. S'il existait des éléments L_Λ de déterminant $+1$ et d'autres de déterminant -1 alors l'ensemble de tous les éléments L_Λ ne serait pas connexe. Ce qui est impossible car $SL(2, \mathbb{C})$ est connexe et l'application $\phi : \Lambda \to L_\Lambda$ est continue. Et comme, $L_{\Lambda_1 \Lambda_2} = L_{\Lambda_1} L_{\Lambda_2}$, ϕ est alors un homomorphisme de $SL(2, \mathbb{C})$ dans $L \in L_+^\uparrow$.

Déterminons maintenant le noyau de l'homomorphisme ϕ que nous noterons Z. C'est l'ensemble des Λ dans $SL(2, \mathbb{C})$, qui pour tout $X \in H_2(\mathbb{C})$ satisfont l'égalité

$$X = \Lambda X \Lambda^*. \tag{4.9}$$

Prenons en particulier, $X = e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, nous voyons que les éléments $\Lambda \in Z$ vérifient $\Lambda \Lambda^* = e$ i.e. $\Lambda = \Lambda^{-1}$. Ainsi la relation (4.5) devient

$$X\Lambda - \Lambda X = 0, \, \forall X \in H_2(\mathbb{C}).$$

Ce qui entraîne $\Lambda = \phi I$. Et comme, $\det \Lambda = 1$, alors $\Lambda = \pm I$. Par conséquent, $L_{\Lambda_1} = L_{\Lambda_2}$ si et seulement si $\Lambda_1 = \pm \Lambda_2$. De plus, le groupe $SL(2, \mathbb{C})$ est simplement connexe ; Ainsi

$$\widetilde{L_+^\uparrow} = SL(2, \mathbb{C}) \text{ et } L_+^\uparrow = SL(2, \mathbb{C})/Z.$$

$\square$

4.2.2 Le Groupe de Poincaré

De même que le groupe de Lorentz, les translations $x^\mu \to x^\mu + a^\mu$ (où a^μ est un vecteur de dimension 4) laissent invariante la pseudo-métrique. Cela conduit à la définition du groupe de Poincaré noté Π, comme étant le groupe des transformations réelles dans l'espace de Minkowski M,

$$x^\mu \longmapsto \sum_\nu L^\mu_\nu x^\nu + a^\mu, \tag{4.10}$$

qui laissent la pseudo-métrique de M invariante.
La relation (4.6) permet d'induire la loi de composition suivante sur le groupe de Poincaré

$$(t_1, L_1)(t_2, L_2) = (t_1 + L_1 t_2, L_1 L_2). \tag{4.11}$$

Ainsi Π est le produit semi-direct $\mathbb{T}^4 \rtimes L$ du groupe des translations $\mathbb{T}^4$ et du groupe de Lorentz L. De même que le groupe de Lorentz, Π est divisible en quatre groupes. Ils seront nommés $\Pi^\uparrow_+$, $\Pi^\uparrow_-$, $\Pi^\downarrow_+$, $\Pi^\downarrow_-$. Dans toute la suite, nous nous intéresserons au groupe $\Pi^\uparrow_+$ et à son revêtement que nous noterons G.

Proposition 4.2.3. *Notons G le revêtement de $\Pi^\uparrow_+$. Alors $G = \mathbb{T}^4 \rtimes SL(2, \mathbb{C})$.*

Démonstration. On a

$$\Pi^\uparrow_+ = \mathbb{T}^4 \rtimes L^\uparrow_+,$$

Donc

$$G = \widetilde{\mathbb{T}^4} \rtimes \widetilde{L^\uparrow_+} = \mathbb{T}^4 \rtimes SL(2, \mathbb{C}).$$

En effet, toute translation a^μ de M étant caractérisée par son vecteur de translation μ de dimension 4, alors $\mathbb{T}^4 \simeq \mathbb{R}^4$. Or $\widetilde{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n$, $\forall n$. Par conséquent, $\widetilde{\mathbb{T}^4} = \mathbb{T}^4$. De plus, $\widetilde{L^\uparrow_+} = SL(2, \mathbb{C})$.

□

Remarque 4.2.4. *Aussi, nous déduisons de (4.7) la loi de composition suivante sur G*

$$(t_1, \Lambda_1)(t_2, \Lambda_2) = (t_1 + L_{\Lambda_1} t_2, \Lambda_1 \Lambda_2). \tag{4.12}$$

Or la topologie définie sur le produit semi-direct $G = \mathbb{T}^4 \rtimes SL(2, \mathbb{C})$ est par définition celle définie sur le produit cartésien $\mathbb{T}^4 \times SL(2, \mathbb{C})$. Et comme $\mathbb{T}^4$ et $SL(2, \mathbb{C})$ sont simplement connexes alors le produit semi-direct $G = \mathbb{T}^4 \rtimes SL(2, \mathbb{C})$ est aussi simplement connexe. De *plus, selon (4.11) le produit des mesures invariantes dans* $\mathbb{T}^4$ *et* $SL(2,\mathbb{C})$ *nous fournit la donnée d'une mesure invariante* μ *sur* G *définie par*

$$\begin{aligned} d\mu(t,\Lambda) &= d\sigma(t)d\nu(\Lambda) \\ &= d^4t\frac{d\beta d\gamma d\delta\overline{d\beta d\gamma d\delta}}{\mid \delta \mid^2},\ avec\ t\in\mathbb{T}^4,\ \Lambda = \begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}\in SL(2,\mathbb{C}). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Ainsi $G = \mathbb{T}^4 \rtimes SL(2,\mathbb{C})$ est un groupe de Lie connexe semi-simple. Posons $K := \mathbb{T}^4 \rtimes SU(2)$. K est un sous-groupe compact de G. En effet $SU(2)$ est un sous-groupe compact de $SL(2,\mathbb{C})$. Dans la suite, nous tâcherons de définir les représentations unitaires irréductibles $\delta \in \hat{K}$. Pour ce faire, nous commencerons par énoncer brièvement des résultats sur la classification de $\mathbb{T}^4$ sous forme d'orbites.

4.2.3 Classes de Représentations unitaires irréductibles sur K

$\mathbb{T}^4$ est un groupe vectoriel non compact. On montre qu'il s'identifie à son groupe dual associé $\widehat{\mathbb{T}^4}$ et que l'ensemble des $L_\Lambda\hat{t}$, pour tout $\hat{t} = (\hat{t_0},\hat{t_1},\hat{t_2},\hat{t_3}) \in \widehat{\mathbb{T}^4}$, et de tous les $L_\Lambda \in L_+^\uparrow$ forment une orbite associée au caractère $\hat{t}$. De plus chaque orbite est contenue dans l'une des hyperboloides

$$\hat{t_0}^2 - \hat{t_1}^2 - \hat{t_2}^2 - \hat{t_3}^2 = m^2, \tag{4.14}$$

où $m^2 \in \mathbb{R}$.

On construit sur $\mathbb{T}^4$, les 6 types d'orbites suivantes

1. $\hat{O_m^+} : \hat{t_0}^2 - \hat{t_1}^2 - \hat{t_2}^2 - \hat{t_3}^2 = m^2$, $m > 0, \hat{t_0} > 0$,
2. $\hat{O_m^-} : \hat{t_0}^2 - \hat{t_1}^2 - \hat{t_2}^2 - \hat{t_3}^2 = m^2$, $m > 0, \hat{t_0} < 0$,
3. $\hat{O_{im}} : \hat{t_0}^2 - \hat{t_1}^2 - \hat{t_2}^2 - \hat{t_3}^2 = -m^2$, $m > 0$,
4. $\hat{O_0^+} : \hat{t_0}^2 - \hat{t_1}^2 - \hat{t_2}^2 - \hat{t_3}^2 = 0$, $m = 0, \hat{t_0} > 0$,
5. $\hat{O_0^-} : \hat{t_0}^2 - \hat{t_1}^2 - \hat{t_2}^2 - \hat{t_3}^2 = m^2$, $m = 0, \hat{t_0} < 0$,
6. $\hat{O_0^0}$: Le point $O = (0,0,0,0)$, $m = 0$.

Nous nous attelerons par la suite à expliciter les représentations unitaires irréductibles sur G associées à l'orbite $\hat{O_m^+}$.

Le sous-groupe de stabilité $S\hat{O_m^+}$ au point $\hat{t_0} = (m,0,0,0)$, $m > 0$ est le groupe unitaire $SU(2)$. Le groupe $SU(2)$ admet pour représentations unitaires irréductibles les $L^j \equiv D^j$ de dimension $2j+1$ où les j sont des demi-entiers (j = 0, 1/2, 1, 3/2...). Par conséquent, les représentations correspondantes sur G induites par les représentations irréductibles D^j de $SU(2)$ seront fonction de deux paramètres m et j. Nous choisirons donc, par la suite, de noter par $D^{m,j}$ les représentations unitaires irréductibles sur G.
Les paramètres m et j représentent en physique des particules, respecitvement la masse totale et le spin total (moment cinétique) d'un système libre et stable.

4.2.4 Application

Soient $G = \mathbb{T}^4 \rtimes SL(2,\mathbb{C})$ et $K = \mathbb{T}^4 \rtimes SU(2)$. Soit $D^{m,j} \in \hat{K}$.
On a $d_{D^{m,j}} = 2j+1$. On a aussi

$$\begin{aligned} \chi_{D^{m,j}}(t,s) &= d_{D^{m,j}}\xi_{D^{m,j}}(t,s) \\ &= (2j+1)Tr\Big(D^{m,j}(t,s)\Big). \end{aligned}$$

Nous allons maintenant expliciter $K^{\#}_{D^{m,j}}(G)$.

Soit $f \in K^{\#}_{D^{m,j}}(G) \Longleftrightarrow \begin{cases} f\Big((t,s).(t',\Lambda)\Big) = f\Big((t',\Lambda).(t,s)\Big) & \forall((t',\Lambda),(t,s)) \in G\times K \\ \quad f\in K(G),\, f = {}_{D^{m,j}}f = f_{D^{\check{m},j}} \end{cases}$

où la loi multiplicative ici est celle explicitée dans la relation (4.8). Évaluons ${}_{D^{m,j}}f$.

Soient $((t,\Lambda)$ et $(n,s)) \in G \times K$,

$$ {}_{D^{m,j}}f(t,\Lambda) = \int_K \chi_{m,j}(n,s) f\Big((n,s)(t,\Lambda)\Big)\, d\mu(n,s)$$

On déduit de (4.12) et (4.13) que

$$ {}_{D^{m,j}}f(t,\Lambda) = \int_{\mathbb{T}^4}\int_{SU(2)} (2j+1)Tr\Big(D^{m,j}(n,s)\Big) f\Big((n+L_s t, s\Lambda)\Big)\, d^4n \frac{d\beta^2 d\alpha \overline{d\beta}^2\,\overline{d\alpha}}{\mid\alpha\mid^2},$$

avec $s = \begin{bmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{bmatrix} \in SU(2)$. On évalue de la même manière $f_{D^{\check{m},j}}$.

$$ f_{D^{\check{m},j}}(t,\Lambda) = \int_{\mathbb{T}^4}\int_{SU(2)} (2j+1)Tr\Big(D^{\check{m},j}(n,s)\Big) f\Big(t+L_\Lambda n, \Lambda s\Big)\, d^4n \frac{d\beta^2 d\alpha \overline{d\beta}^2\,\overline{d\alpha}}{\mid\alpha\mid^2}.$$

De plus, Soit $f \in K^{\#}_{D^{m,j}}(G)$, la transformée de Fourier-Laplace sphérique de type $D^{m,j}$ existe et est donnée par

$$\hat{f}_{D^{m,j}}(n,s) = \int_G f(x)\phi_{v,m,j}(t,\Lambda) d\mu_G(t,\Lambda).$$

Elle vérifie les conditions nécéssaires du théorème 3.5.1.

4.3 Un théorème de Paley-Wiener sur les groupes de Lie réductifs

Soit G un groupe de Lie réductif avec series discretes non vides. $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie de G. Prenons donc J le sous-groupe compact de Cartan de G et $\mathcal{J}$ la sous-algèbre de Cartan associée. Soient $\mathcal{U}$ un sous-ensemble ouvert de G qui est complètement G-invariant, et γ un élément régulier de G.

On notera par J^0 la composante connexe de J et $K = \gamma J^0$. K est un sous-groupe de Cartan de G, $\mathcal{K}$ son algèbre de Lie, et le groupe de Weyl $W(G, K)$ agit sur $G/K \times K_{reg}$ où K_{reg} désigne l'ensemble des éléments réguliers de K ; Prenons dg une mesure de G invariante sur G/K.

Comme vu plus haut à la proposition 3.1.3, L'algèbre $K_\delta^\natural(\mathcal{U})$ est isomorphe à l'algèbre $U_{c,\delta}(\mathcal{U})$ des fonctions continues à support compact ψ de $\mathcal{U}$ dans $F_{\check{\delta}} = Hom_{\mathbb{C}}(E_{\check{\delta}}, E_{\check{\delta}})$ pour toute représentation double de Banach $(u_{\check{\delta}}, u_{\check{\delta}})$ de K.

En effet, $\forall f \in K_\delta^\sharp(\mathcal{U})$, pour $\psi_f^\delta(x) = \displaystyle\int_K \mu_{\check{\delta}}(k^{-1}) f(kx) dk$, on a que $\psi_f^\delta(x) \in U_{c,\delta}(\mathcal{U})$. Et l'isomorphisme est donné par $f \longmapsto \psi_f^\delta$.

L'intégrale orbitale classique sur un groupe de Lie réductif est donnée par

$$J_G(f)(\gamma) = |det(1 - Ad(\gamma^{-1}))_{\mathcal{G}/\mathcal{K}}|^{1/2} \int_{G/K} f({}^g\gamma) dg, \qquad f \in D(\mathcal{U}_{reg}).$$

Si $f \in K_\delta^\natural(\mathcal{U}_{reg})$, alors par l'isomorphisme $f \longmapsto \psi_f^\delta$ de $K_\delta^\natural(\mathcal{U})$ dans $U_{c,\delta}(\mathcal{U})$, nous pouvons poser

$$J_G^\delta(f)(\gamma) = |det(1 - Ad(\gamma^{-1}))_{\mathcal{G}/\mathcal{K}}|^{1/2} \int_{G/K} \psi_f^\delta({}^g\gamma) dg.$$

L'intégrale δ-orbitale $J_G^\delta(f)(\gamma)$ est définie par

$$J_G^\delta(f)(\gamma) = |det(1 - Ad(\gamma^{-1}))_{\mathcal{G}/\mathcal{K}}|^{1/2} \int_K \int_{G/K} \mu_{\check{\delta}}(k) f(k.{}^g\gamma) dk dg.$$

Notons que si δ est triviale de dimension 1, on retrouve l'intégrale orbitale classique.

Notons $\mathcal{G}_{p,\delta}$ l'ensemble des fonctions sphériques de type δ et de hauteur p. Soit A le facteur dans la décomposition de Lagrange de G contenant K, c'est à dire $G = K.A$ et $\mathcal{A}$ l'algèbre de Lie de A. Pour tout $\phi \in \mathcal{G}_{p,\delta}$, $\exists\, u_{\check{\delta}} \in \hat{K}$ et $\nu \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^*$ tel que

$$\phi(kg) = \int_K u_{\check{\delta}}(k_1 k)(k_1 g) dk_1.$$

Ainsi, nous pouvons identifier $\mathcal{G}_{p,\delta}(G)$ avec $K \times \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^*$ et ϕ avec $(u_\delta, \nu) \in K \times \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^*$ et posons $||(u_\delta, \nu)|| = ||u_\delta|| + ||\nu||$.

On note ρ_Δ la demi-somme des racines, κ la signature du groupe de Weyl W de (G,K), et Δ un système de racines positives. Si μ est une combinaison linéaire de racines de K, on note ξ_μ le caractère de K correspondant.

Pour tout $r>0$, notons par $PW_\delta(K)_r$ l'espace des fonctions F : $\mathcal{G}_{p,\delta} \longrightarrow End(E)$ telle que

1. $\nu \longrightarrow F(u_\delta,\nu)$ est holomorphe sur $\mathcal{C}^*$,
2. $\forall N\in\mathbb{N}$, $\exists\, C_N$ tel que $|F(u_\delta,\nu)| \le C_N(1+||u_\delta||+||\nu||)^{-N}e^{r||Im\nu||}$,
3. $F(w.(u_\delta,\nu)\xi_{w.\rho_\Delta-\rho_\Delta}) = \kappa(w)F(u_\delta,\nu)$, $w\in W$.

Posons $\mathcal{P}W_\delta(K) = \bigcup_{r>0}\mathcal{P}W_\delta(K)_r$. Nous munissons $\mathcal{P}W_\delta(K)_r$ de la topologie définie par les normes

$$S_k(F) = \sup_{\delta,\nu}(1+\|u_\delta\|+\|\nu\|)^k|F(u_\delta,\nu)|.$$

Théorème 4.3.1.

$$\mathcal{F}(I^\infty_{c,\delta}(G)^\Delta) = \mathcal{P}W_\delta(K)^\Delta,$$

où l'application $f \longmapsto \mathcal{F}f$ est la transformée de Fourier sphérique de type δ.

On appelle $I^\infty_{c,\delta}(G)^\Delta$ l'ensemble des fonctions de $I^\infty_{c,\delta}(G)$ qui vérifient $\forall f\in I^\infty_{c,\delta}(G)$, et $\forall\ k\in K_{reg}$,

$$f(g^{-1}kg) \quad = \quad \kappa(g)\xi_{\rho_\Delta - g\rho_\Delta}f(k).$$

Démonstration. $\mathcal{P}W_\delta(K)$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{P}W_\delta(K,End(E))$, alors $\mathcal{P}W_\delta(K)$ est un espace de Fréchet. Posons $Z_{\delta,p}(K)$ l'ensemble des fonctions continues ϕ de type positif de $\mathcal{G}_{p,\delta}(K)$. Il existe $z\in(End(E))^*$ telle que $\forall c_1,c_2,...,c_n\in\mathcal{C}$, $x_i\in G$ et $i\in\{1,2,...,n\}$

$$\langle\sum c_i\bar{c_j}\phi(x_ix_j^{-1}),z\rangle.$$

Grâce au théorème de Bochner, il existe une mesure $\hat{\mu}$ telle que

$$f(kg) = \int_{Z_{\delta,p}(K)} F(u_\delta,\nu)(u_\delta,\nu)(kg)\,d\hat{\mu}(u_\delta,\nu),$$

Pour tout fonction F dans $\mathcal{P}W_\delta(K)$, nous avons $\mathcal{F}f=F$.

$$\begin{aligned} f_K(x) \quad &= \quad \int_{Z_{\delta,p}(K)} F(u_\delta,\nu)(u_\delta,\nu)_K(x)\,d\hat{\mu}(u_\delta,\nu),\\ f*\chi_\delta(x) \quad &= \quad \int_{Z_{\delta,p}(K)} F(u_\delta,\nu)(u_\delta,\nu)*\chi_\delta(x)\,d\hat{\mu}(u_\delta,\nu), \end{aligned}$$

et parce que $(u_\delta, \nu) \in \mathcal{G}_{p,\delta}(K)$ alors $f \in I^\infty_{c,\delta}(G)$.

Si $F \in \mathcal{P}W_\delta(K)^\Delta$, pour $w \in W_C$, nous avons $F(g.(u_\delta, \nu)\xi_{g.\rho_\Delta - \rho_\Delta}) = \kappa(g)F(u_\delta, \nu)$, $g \in G$.

$$\begin{aligned}
f(g.h) &= \int_{Z_{\delta,p}(K)} F(u_\delta, \nu)(u_\delta, \nu)(g.h)\, d\hat{\mu}(u_\delta, \nu) \\
&= \int_{Z_{\delta,p}(K)} F(g.(u_\delta, \nu))(u_\delta, \nu)(h)\, d\hat{\mu}(u_\delta, \nu) \\
&= \int_{Z_{\delta,p}(K)} \kappa(g)\xi_{\rho_\Delta - g\rho_\Delta}(h) F(u_\delta, \nu)(u_\delta, \nu)(h)\, d\hat{\mu}(u_\delta, \nu) \\
&= \kappa(g)\xi_{\rho_\Delta - g\rho_\Delta}(h) f(h).
\end{aligned}$$

Alors $f \in I^\infty_{c,\delta}(G)^\Delta$. Ce qui prouve que l'application est surjective.

$\square$

Posons $\Theta^G_{((u_{\tilde{\delta}}, \nu),\Delta)}(f) = \mathcal{F}(f)_K(u_\delta, \nu)$.

Théorème 4.3.2. *L'application $f \longmapsto \mathcal{F}(f)_K$ est continue de $I^\infty_{c,\delta}(G)$ dans $\mathcal{P}W_\delta(K)$.*

Démonstration. $\forall\ f \in I^\infty_{c,\delta}(G)$, on a que $f \in \mathcal{D}(G)$ (l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact sur G). Ainsi, $\mathcal{F}(f)_K \in \mathcal{P}W_\delta(K)$. Et comme $\mathcal{F}(f)_K(\phi) = \mathcal{F}(f)_K(U_\phi)$ et

$$|\mathcal{F}(f)_K(U_\phi)| \leq c_N(1 + \|\Gamma\| + \|\nu\|)^{-N} e^{r\|Im\nu\|}.$$

Par conséquent, l'application est continue. $\square$

Fixons des classes de conjugaison du sous-groupe de Cartan de G, i.e. $K_1, K_2, ..., K_k \in Car(G)$, et $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_k$ les systèmes de racines positifs correspondants. Alors $\forall f \in I^\infty_{c,\delta}(G)$, nous avons

$$\mathcal{F}(f)_K \in \mathcal{P}W_\delta(K)^{\Delta_i}.$$

Théorème 4.3.3. *L'application F donnée par*

$$\begin{array}{rccl}
F: & I^\infty_{c,\delta}(G) & \longrightarrow & \bigoplus_{1\leq i\leq k} \mathcal{P}W_\delta(K)^{\Delta_i}, \\
& f & \longmapsto & \sum_{i=1}^{k} \mathcal{F}f_{K_i},
\end{array}$$

est surjective et continue.

Démonstration. Posons $F = \sum F_i \in \bigoplus_{1\leq i\leq k} \mathcal{P}W_\delta(K)^{\Delta_i}$. Par le théorème 3.2, il existe $\phi_i \in I^\infty_{c,\delta}(K_i)^{\Delta_i}$ telle que $\hat{\phi}_i = F_i$.

Posons $c_{G,K_i}\phi_i = |K/Z(G,\gamma K_i^0)|$. La fonction c_{G,K_i} est une fonction localement constante de K_i. La fonction $c_{G,K_i}\phi_i \in I^\infty_{c,\delta}(K_i)^{\Delta_i}$ et il existe $f \in I^\infty_{c,\delta}(G)$ telle que

$$b_{\Delta_i} J_G(f)_{K_i} = c_{G,K_i}\phi_i,$$

où $b_\Delta(\gamma) = \prod_{\alpha\in\Delta} \frac{1-\xi_\alpha(\gamma^{-1})}{|1-\xi_\alpha(\gamma^{-1})|}$.

Alors $\forall\ (u_{\check{\delta}}, \nu) \in \mathcal{G}_{p,\delta}(K)$, Θ_{ϕ,Δ_i} restreint à K_{reg} s'annule et nous avons

$$c_{G,K_i}\phi_i b_{\Delta_i} J_G(f)_{K_i} = \mathcal{F}f_{K_i}.$$

Ce qui prouve que F est surjective. Posons

$$\Theta_{((u_{\check{\delta}},\nu),\Delta)}(J_G(f)) = \Theta_{((u_{\check{\delta}},\nu),\Delta)}(f), \quad \forall f \in I^\infty_{c,\delta}(K_i).$$

Notons par $I^\delta(G)$, l'image de $I^\infty_{c,\delta}$ par J^δ_G i.e.

$$J^\delta_G(I^\infty_{c,\delta}) = I^\delta(G).$$

Si $\psi \in I^\delta(G)$, posons

$$\bar{\mathcal{F}}(\psi)(u_{\check{\delta}}, \nu) = \Theta_{((u_{\check{\delta}},\nu),\Delta)}(\psi).$$

$\square$

Corollaire 4.3.4.

$$\begin{array}{rccl} \bar{\mathcal{F}}: & I^\delta(G) & \longrightarrow & \bigoplus_{1\leq i\leq k} \mathcal{P}W_\delta(K)^{\Delta_i}, \\ & f & \longmapsto & \sum_{i=1}^{k} \mathcal{F}f_{K_i}, \end{array}$$

est continue et bijective.

Conclusion

Les principaux résultats obtenus dans cette thèse relèvent de l'analyse harmonique non commutative. Les transformations de Fourier sphériques sont les transformations de Gelfand associées à une algèbre de groupe non commutative.Dans notre travail, le groupe topologique localement compact G et le sous-groupe compact K sont tels que l'algèbre de groupe obtenue n'est pas commutative et dépend du dual unitaire du groupe K. En dimension 1 et pour des classes de représentations triviales, on retrouve les cas classiques des transformations de Fourier. En utilisant la notion de transformation d'Abel généralisée présentée à la section 3.4, nous avons obtenu, pour les groupes de Lie semi-simples, une généralisation du théorème de Paley-Wiener suivant une classe δ de représentations irréductibles. Pour les groupes de Lie réductifs à séries discrètes non vides, nous avons égalementtrouvé une extension du théorème de Paley-Wiener caractérisant les fonctions qui sont transformées de Fourier sphériques d'une certaine classe de fonctions Kinvariantes, et dépendant du dual unitaire de K. Pour y arriver, nous avons utilisé la transformation d'Abel et le théorème de Bochner généralisés obtenus respectivement à la section 3.4 et à la section 2.3.Le groupe de Poincaré est un groupe très connu en physique des particules caractérisées par leurs masses et leurs spins (moments cinétiques). Dans la section 4.2, nous avons construit sur ce groupe, une certaine classe de représentations unitaires irréductibles. L'application de notre théorème de Paley-Wiener suivant cette classe a permis de définir une condition nécessaire d'existence de la transformée de Fourier sur ce groupe, et aussi une formule explicite de cette transformée.

Bibliographie

[1] W.H. BARKER. The spherical Bochner theorem on semisimple Lie groups. *Journal of Functional Analysis, 20*, pages 179–207, 1975.

[2] N. BOURBAKI. *Groupes et algèbres de Lie, Chapitre I.* Hermann, Paris, 1971.

[3] Haïm BREZIS. *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Application.* Université Pierre et Marie-Curie, Masson, 1983.

[4] HARISH CHANDRA. Two theorems on semi-simple Lie groups, second series, vol. 83, no. 1. *Annals of Mathematics*, pages 74–128, Jan 1966.

[5] Jacques FARAUT. *Groupes et Algèbres de Lie, Analyse sur les groupes de Lie Cours d'initiation.* Calvage Mounet, 2018.

[6] Mogens FLENSTED-JENSEN. Spherical functions on a simply connected semisimple Lie group. *Mathematische Annalen*, pages 65–92, 1977.

[7] Adrien FONTAINE. *Notes de Cours sur le théorème de Paley-Wiener.* 2014.

[8] Ramesh GANGOLLI. On the Plancherel formula and the Paley-Wiener theorem for spherical functions on semisimple Lie groups. *Annals of Mathematics*, page 150–165, 1971.

[9] Ramesh GANGOLLI and Veeravalli VARADARAJAN. *Harmonic Analysis of Spherical Functions on Real Reductive Groups.* Springer, 1988.

[10] Ramesh GANGOLLI and Veeravalli VARADARAJAN. *Theory of group representations and applications.* Springer, 2011.

[11] Kinvi KANGNI and Saliou TOURÉ. Transformations de Fourier sphériques de type delta. *Annales Mathématiques Blaise Pascal Tome 3 N2*, 1996.

[12] Anthony KNAPP. *Representation Theory of Semisimple Groups.* Princeton University Press, 2011.

[13] Ettien Y.F. N'DA and K KANGNI. On some extension of Paley Wiener theorem. À Paraître, Oct 2019.

[14] Olufemi O. OYADARE. On harmonic analysis of spherical convolutions on semisimple Lie groups. *Theoretical Mathematics Applications, vol.5, no.3,*, page 19–36, 2015.

[15] R. S. PATHAK and Abhishek SINGH. Paley–Wiener–Schwartz type theorem for the wavelet transform. *Applicable Analysis*, pages 1324–1332, Jan 2018.

[16] Coulibaly PIE and K KANGNI. Sur une extension du théorème de Bochner. *Afrika Mathematika*, NOv 2012.

[17] Gath WARNER. *Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups Tome I.* Springer, 1972.

[18] Gath WARNER. *Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups Tome II.* Springer, 1972.